SBP Mathe Aufbaukurs 3 *# 0* *by Clifford Wolf*

SBP Mathe Aufbaukurs 3

 # 0 Antwort

Diese Lernkarten sind sorgfältig erstellt worden, erheben aber weder Anspruch auf Richtigkeit noch auf Vollständigkeit.

Das Lernen mit Lernkarten funktioniert nur wenn die Inhalte bereits einmal verstanden worden sind. Ich warne davor diese Lernkarten nur stur auswendig zu lernen.

Diese und andere Lernkarten können von
`http://www.clifford.at/zettelkasten/`
heruntergeladen werden.

Viel Erfolg bei der **SBP Mathe Aufbaukurs 3** Prüfung!

Clifford Wolf <clifford@clifford.at>

SBP Mathe Aufbaukurs 3 *# 1* *by Clifford Wolf*

Imaginäre und komplexe Zahlen

 # 1 Antwort

Die Quadratwurzeln der negativen reellen Zahlen heißen **imaginäre Zahlen**. Alle imaginäre Zahlen sind vielfache der Zahl i:

$$\sqrt{-1} = i \qquad \sqrt{-x} = \sqrt{x} \cdot i \qquad (x \in \mathbb{R}_0^+)$$

D.h. die Quadrate der imaginären Zahlen sind die negativen reellen Zahlen:

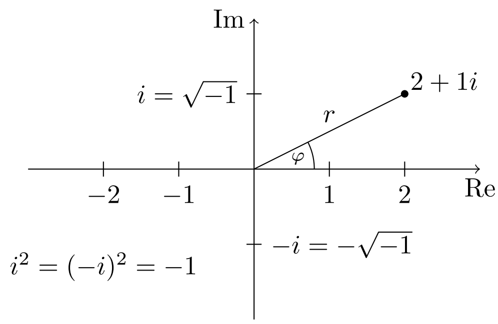
$$(xi)^2 = (-xi)^2 = -(x^2)$$

Die Summen der Gestalt $a + bi$ bilden die Zahlenmenge der **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$.

SBP Mathe Aufbaukurs 3 *# 2* *by Clifford Wolf*

Komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene

 # 2 Antwort



$$r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \; [+180°]$$

$$a + bi = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

SBP Mathe Aufbaukurs 3 *# 3* *by Clifford Wolf*

Darstellungen komplexer Zahlen

 # 3 Antwort

1. Die algebraischen Form

$$a + bi$$

2. Die trigonometrische Form

$$r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

3. Die Exponentialform

$$r \cdot \mathrm{e}^{i\varphi}$$

$$\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi \qquad \varphi = \arg(a + bi)$$

$$a = \mathrm{Re}(a + bi) \qquad b = \mathrm{Im}(a + bi) \qquad r = |a + bi|$$

Summen und Differenzen komplexer Zahlen

$$(a+bi) \quad + \quad (c+di) \quad = \quad (a+c) \quad + \quad (b+d)i$$

$$(a+bi) \quad - \quad (c+di) \quad = \quad (a-c) \quad + \quad (b-d)i$$

Die Addition und Subtraktion komplexer Zahlen entspricht der Addition und Subtraktion der Ortsvektoren in der Gaußschen Zahlenebene.

Produkte komplexer Zahlen

Ansatz 1: Ausmultiplizieren der algebraischen Form

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Ansatz 2: Multiplikation des Betrages und Addition der Phase in der trigonometrischen Form

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot s(\cos\psi + i\sin\psi) = rs\big(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)\big)$$

Ansatz 3: Ausmultiplizieren der Exponentialform

$$r\cdot \mathrm{e}^{i\varphi} \ \cdot \ s\cdot \mathrm{e}^{i\psi} = rs\cdot \mathrm{e}^{i(\varphi+\psi)}$$

Konjugiert komplexe Zahl

Wenn $z = a+bi$, dann ist $\overline{z} = a-bi$ die **zu z konjugiert komplexe Zahl**.

$$z\cdot\overline{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2+b^2$$

Das Produkt aus einer komplexen Zahl und ihrer konjugiert komplexen Zahl ist immer eine reelle Zahl.

Quotienten komplexer Zahlen

Durch Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners wird der Nenner reell:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

In trigonometrischer Form oder Exponentialform:

$$\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{s(\cos\psi+i\sin\psi)} = \frac{r}{s}\cdot\big((\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi)\big)$$

$$\frac{r\cdot\mathrm{e}^{i\varphi}}{s\cdot\mathrm{e}^{i\psi}} = \frac{r}{s}\cdot\mathrm{e}^{i(\varphi-\psi)}$$

Potenzen komplexer Zahlen

$$z^n \quad = \quad [r, \varphi]^n \quad = \quad [r^n, n\varphi \bmod 2\pi] \quad = \quad r^n \cdot \mathrm{e}^{n\varphi i}$$

Für $r = 1$ ergibt sich daraus die **Moivresche Formel**:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \qquad \text{fuer alle } n \in \mathbb{N}$$

Wurzeln komplexer Zahlen

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} \quad = \quad \sqrt[n]{[r, \varphi]} \quad &= \quad [\sqrt[n]{z}, \frac{\varphi + k2\pi}{n} \bmod 2\pi] \\ &= \quad \sqrt[n]{z} \cdot \mathrm{e}^{(\frac{\varphi + k2\pi}{n})i} \qquad\qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

D.h. die n-te Wurzel einer komplexen Zahl hat immer n Lösungen in $\mathbb{C}$. Diese Lösungen bilden ein regelmäßiges Vieleck in der Gaußschen Zahlenebene.

Fundamentalsatz der Algebra

Jede Gleichung der Form

$$c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_2 z^2 + c_1 z^1 + c_0 = 0$$

hat n Lösungen in $\mathbb{C}$, wobei jede Lösung entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt wird.

(Unendliche) Zahlenfolge

Eine Funktion $\mathbb{N}^\star \to \mathbb{R} : n \mapsto a_n$ heißt **(unendliche) Zahlenfolge**.

Man schreibt dafür z.B. $\langle a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \rangle$ oder $\langle a_n | n \in \mathbb{N}^\star \rangle$ oder kurz $\langle a_n \rangle$.

Umgebung

Man Bezeichnet das Intervall $]a-\epsilon; a+\epsilon[$ mit $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ als **ϵ-Umgebung von a** oder **Umgebung mit dem Radius ϵ um a**.

Umgebungen können groß sein (wenn nämlich ϵ groß ist), im allgemeinen ist man aber an besonders kleinen Umgebungen interessiert.

„fast alle“

Liegen in einer Umgebung unendlich viele Glieder einer Folge, außerhalb dieser Umgebung aber nur endliche viele, so sagt man: **fast alle** Glieder der Folge liegen in der Umgebung.

Grenzwert einer Folge

Eine Zahl a heißt **Grenzwert** einer Folge $\langle a_n \rangle$, wenn in *jeder* Umgebung von a *fast alle* Glieder dieser Folge liegen.

Man schreibt dann: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

D.h. man kann zu jedem ϵ einen Index N angeben, so dass höchstens die Glieder a_1 bis a_N ausserhalb der ϵ-Umgebung um a liegen.

Konvergenz

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt **konvergent**.

Eine Folge, die keinen Grenzwert besitzt, heißt **divergent**.

Grenzwertsätze für Folgen

Seien $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ konvergente Folgen mit den Grenzwerten a und b:

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = a - b$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \qquad \text{wenn } b \neq 0$$

Häufungswert einer Folge

Eine Zahl heißt Häufungswert einer Folge, wenn in jeder Umgebung der Zahl unendlich viele Glieder der Folge liegen.

Monoton wachsende und monoton abnehmende Folgen

Eine Folge heißt **monoton wachsend**, wenn

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star : a_{n+1} > a_n.$$

Eine Folge heißt **monoton abnehmend**, wenn

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star : a_{n+1} < a_n.$$

Obere/untere Schranke

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall n \in \mathbb{N}^\star : a_n \leq S$.

Jede solche Zahl S heißt **obere Schranke** von $\langle a_n \rangle$.

(Analog fuer **nach unten beschränkt**, **unten Schranke**.)

Die **kleinste obere Schranke** heißt **Supremum**.
Die **gröste untere Schranke** heißt **Infimum**.

Eine Folge heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben *und* nach unten beschränkt ist.

Beschränkte Folgen und Häufungswerte

Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungswert.

Jede beschränkte Folge mit nur einem Häufungswert konvergiert gegen diesen Häufungswert.

Jede monoton steigende und nach oben beschränkte Folge konvergiert gegen ihr Supremum.

Jede monoton abnehmende und nach unten beschränkte Folge konvergiert gegen ihr Infimum.

Häufungspunkte von Mengen

Sei $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge und $p \in \mathbb{R}$.

Man nennt p einen **Häufungspunkt** von $\mathbb{M}$, wenn in jeder Umgebung um p unendlich viele Elemente von $\mathbb{M}$ liegen.

Ist p Häufungspunkt von $\mathbb{M}$, dann gibt es eine Folge $\langle x_n \rangle$ von Elementen aus $\mathbb{M}$ mit dem Grenzwert p.

Ist p ein Element von $\mathbb{M}$ aber nicht Häufungspunkt von $\mathbb{M}$, dann nennt man p **isolierter Punkt** von $\mathbb{M}$.

Reihe

Gegeben sei eine Folge $\langle a_n \rangle$. Unter der aus dieser Folge gebildeten **Reihe** versteht man die die Folge der Teilsummen $\langle s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \rangle$.

Falls der Grenzwert $s = \lim_{s\to\infty} s_n$ existiert so nennt man diese Zahl **Summe der Folge** $\langle a_n \rangle$ oder **Wert der Reihe** $\langle s_n \rangle$.

Geometrische Folgen und Reihen

Eine Folge $\left\langle a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \right\rangle$ heißt **geometrische Folge**.

Für die Summe s_n der ersten n Glieder dieser Folge gilt:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad \left(\begin{array}{c} a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots) \\ \text{(Satz von Horner)} \quad \text{mit } a = 1 \text{ und } b = q \end{array} \right)$$

Wenn $|q| < 1$ so hat die Reihe $\langle s_n \rangle$ einen Grenzwert s:

$$s = \frac{a_1}{1 - q} \qquad \left(\text{wegen } \lim_{n\to\infty} q^n = 0\right)$$

Grenzwerte von Funktionen

Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

Wenn für *jede* Folge $\langle z_n \rangle$ mit dem Grenzwert p ($z_n \in \mathbb{A}$ und $z_n \neq p$) die Folge $\langle f(z_n) \rangle$ denselben Grenzwert q besitzt, so nennt man die Zahl q den **Grenzwert von f and der Stelle p**.

$$\lim_{z \to p} f(z) = \lim_{n \to \infty} f(z_n) = q \qquad \forall \langle z_n \rangle \,\Big|\, \lim_{n \to \infty} z_n = p$$

Grenzwertsätze für Funktionen

Seien $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen. Falls die Grenzwerte $\lim_{z \to p} f(z)$ und $\lim_{z \to p} g(z)$ existieren, gilt:

$$\lim_{z \to p} \big(f(z) + g(z) \big) = \lim_{z \to p} f(z) + \lim_{z \to p} g(z)$$

$$\lim_{z \to p} \big(f(z) - g(z) \big) = \lim_{z \to p} f(z) - \lim_{z \to p} g(z)$$

$$\lim_{z \to p} \big(f(z) \cdot g(z) \big) = \lim_{z \to p} f(z) \cdot \lim_{z \to p} g(z)$$

$$\lim_{z \to p} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \to p} f(z)}{\lim_{z \to p} g(z)} \qquad \text{wenn } \lim_{z \to p} g(z) \neq 0$$

Grenzwerte besonders
einfacher Funktionen

Die identische Funktion $z \mapsto z$:

$$\lim_{z \to p} z = p$$

Die konstante Funktion $z \mapsto c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{z \to p} c = c$$

ε-δ-Definition des
Grenzwerts einer Funktion

Sei
$f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion,
$p \in \mathbb{R}$ eine Häufungsstelle von $\mathbb{A}$,
$q \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von f an der Stelle p,
$U_{p\delta}$ eine Umgebung von p in $\mathbb{A}$ mit dem Radius δ und
$U_{q\varepsilon}$ eine Umgebung von q in $\mathbb{R}$ mit dem Radius ε:

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in U_{p\delta} : f(x) \in U_{q\varepsilon}$$

In Worten: q ist Grenzwert von f an der Stelle p, wenn es für jede ε-Umgebung um q eine δ-Umgebung um p gibt, so dass die Funktionswerte von f an allen Stellen der δ-Umgebung um p in der ε-Umgebung um q liegen.

Definition: Differenzierbarkeit

Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

f ist an der Stelle $x \in \mathbb{A}$ **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

existiert. Dieser Grenzwert heisst dann **Differentialquotient** (**Änderungsrate**, **Ableitung**) **von** f **and der Stelle** x.

Ist f in ganz $\mathbb{A}$ differenzierbar, so sagt man kurz: f ist differenzierbar.

Definition: Stetigkeit

Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

f ist an der Stelle $x \in \mathbb{A}$ **stetig**, wenn der Grenzwert an der Stelle x existiert und gleich dem Funktionswert $f(x)$ ist:

$$\exists \lim_{z \to x} f(z) = f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f \text{ stetig bei } x$$

Ist f an jeder Stelle von $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{A}$ stetig, dann heißt f stetig in $\mathbb{M}$.

Ist f in ganz $\mathbb{A}$ stetig, so sagt man kurz: f ist stetig.

ε-δ-Definition der Stetigkeit einer Funktion

Sei
 $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion,
 $p \in \mathbb{A}$ und eine Häufungsstelle von $\mathbb{A}$,
 $U_{p\delta}$ eine Umgebung von p in $\mathbb{A}$ mit dem Radius δ und

f ist stetig an der Stelle p wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in U_{p\delta} : |f(x) - f(p)| < \varepsilon$$

In Worten: Für jedes ε gibt es eine δ-Umgebung um p, so dass der Funktionswert von f an allen Stellen der δ-Umgebung in einer ε-Umgebung um den Funktionswert von f an der Stelle p liegt.

Stetige Fortsetzung einer Funktion

Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und p eine Häufungsstelle von $\mathbb{A}$. Sei weiters

$$q = \lim_{x \to p} f(x)$$

Die Funktion

$$\overline{f} = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{A} \backslash \{p\} \\ q & x = p \end{cases}$$

heißt „**stetige Fortsetzung von** f **in die Stelle** p“.

Grenzwert über die Stetigkeit definiert: Wenn $\overline{f}$ an der Stelle p stetig ist, dann ist $\overline{f}(p)$ der Grenzwert von f an der Stelle p.

Stetigkeit von Polynomfunktionen und rationalen Funktionen

Jede Polynomfunktion ist an jeder Stelle $p \in \mathbb{R}$ stetig.

Jede rationale Funktion $f(x) = g_1(x)/g_2(x)$ (g_1 und g_2 sind Polynomfunktionen) ist an jeder Stelle $p \in \mathbb{R}$ stetig, die nicht Nullstelle von g_2 ist.

Beweis: Anwenden der Grenzwertsätze für Funktionen.

Zwischenwertsatz, Nullstellensatz und Satz vom Vorzeichen stetiger Funktionen

Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine in $[a;b] \subseteq \mathbb{A}$ stetige Funktion.

Zwischenwertsatz:
Für jedes $q \in [f(a); f(b)]$ gibt es ein $p \in [a;b]$, so dass $f(p) = q$. D.h. $\{f(x)|x \in [a;b]\} \supseteq [f(a); f(b)]$.

Nullstellensatz:

$$\left.\begin{array}{rr} & f(a) < 0 < f(b) \\ \text{oder} & f(a) > 0 > f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists p \in [a;b] : f(p) = 0$$

Satz vom Vorzeichen:

$$f(p) > 0 \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : \forall\, x \in [p \pm \varepsilon] : f(x) > 0$$

Stetigkeit differenzierbarer Funktionen

Ist eine Funktion f an einer Stelle p differenzierbar, dann ist f an der Stelle p stetig.

Beweis aus dem Differentialquotienten (mit $z \neq p$):

$$\begin{aligned} \exists \frac{f(z)-f(p)}{z-p} \quad &\Rightarrow \quad f(z) = f(p) + \frac{f(z)-f(p)}{z-p} \cdot (z-p) \\ \Rightarrow \quad \lim_{z\to p} f(z) \quad &= \quad \lim_{z \to p} \left(f(p) + \frac{f(z)-f(p)}{z-p} \cdot (z-p) \right) \\ &= \quad f(p) + f'(p) \cdot 0 \quad = \quad f(p) \end{aligned}$$

Mittelwertsatz und Nullstellensatz der Differentialrechnung

Mittelwertsatz der Differentialrechnung:
Ist $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ in $[a;b] \subseteq \mathbb{A}$ differenzierbar, so gibt es mindestens eine Stelle $z \in [a;b]$ mit

$$f'(z) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Nullstellensatz der Differentialrechnung:
Ist $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ in $[a;b] \subseteq \mathbb{A}$ differenzierbar und gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es mindestens eine Stelle $z \in [a;b]$ mit $f'(z) = 0$.

Untersumme und Obersumme

Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0, x_1, x_2, .., x_n$ eine **Zerlegung** des Intervalls $[a; b] \subseteq \mathbb{A}$.

In jedem der Intervalle $[x_{i-1}; x_i]$ sei $f(k_i)$ der kleinste Funktionswert (bzw. das Infimum) und $f(g_i)$ der grösste Funktionswert (bzw. das Supremum).

Dann heißt

$$U = \sum_{i=1}^{n} f(k_i)(x_i - x_{i-1})$$

Untersumme von f in $[a; b]$ und

$$O = \sum_{i=1}^{n} f(g_i)(x_i - x_{i-1})$$

Obersumme von f in $[a; b]$.

Integrale und Folgen von Untersummen und Obersummen

Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

Sei $\langle U_n \rangle$ eine Folge von Untersummen von f über $[a; b]$, wobei das n die Anzahl der Teilintervalle der zugrundeliegenden Zerlegung angibt.

Sei $\langle O_n \rangle$ gleichermaßen eine Folge von Obersummen.

Wenn es eine Folge $\langle U_n \rangle$ und eine Folge $\langle O_n \rangle$ gibt, sodass beide Folgen gegen den selben Grenzwert konvergieren, dann heißt dieser Grenzwert **Integral** von f über $[a; b]$ und f **integrierbar** über $[a; b]$:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Integrierbarkeit von stetigen Funktionen

Jede auf dem Intervall $[a; b]$ stetige Funktion f ist in diesem Intervall integrierbar.

Für in $[a; b]$ stetige Funktionen gilt insbesondere:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i) \cdot \Delta x$$

für eine von f unabhänige Zerlegung (z.Bsp. einfach in gleich lange Teilintervalle).

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine stetige reelle Funktion und $[a; b] \subseteq \mathbb{A}$.

Dann ist

$$F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

eine Stammfunktion von f. Es ist also $F'_a = f$.

Beweis durch Umformung: $f(x) = \lim_{z\to x} \frac{\int_a^z f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{z - x}$

$$= \lim_{z\to x} \frac{\int_x^z f(t)\,\mathrm{d}t}{z-x} \overset{\star}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad f(x)$$

* $h := z - x$