Mathematik 1 für ET

Diese Lernkarten sind sorgfältig erstellt worden, erheben aber weder Anspruch auf Richtigkeit noch auf Vollständigkeit.

Das Lernen mit Lernkarten funktioniert nur wenn die Inhalte bereits einmal verstanden worden sind. Ich warne davor diese Lernkarten nur stur auswendig zu lernen.

Diese und andere Lernkarten können von
`http://www.clifford.at/zettelkasten/`
heruntergeladen werden.

Viel Erfolg bei der **Mathematik 1 für ET** Prüfung!

Clifford Wolf <*clifford@clifford.at*>

Peano Axiome der natürlichen Zahlen

- 1 ist eine natürliche Zahl ($1 \in \mathbb{N}$).
- Jeder nat. Zahl n ist genau ein Nachfolger $N(n)$ zugeordnet.
- 1 ist kein Nachfolger.
- $n \neq m \implies N(n) \neq N(m)$
- Induktionsaxion:
  $A(1) \wedge (A(i) \Rightarrow A(N(i))) \implies A(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$

De Morgan'sche Regeln

Seien A, B Aussagen, dann gilt:

$$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$$

(Beweis mittels Wahrheitstafel.)

Direkter und indirekter Beweis

Direkter Beweis: Um einen Satz in der Form $A \Rightarrow B$ zu beweisen wird die Gültigkeit von A angenommen und durch eine Kette von Schlüssen die Gültigkeit von B gefolgert.

Indirekter Beweis: Es gilt allgemein

$$(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

(Bew. mit Wahrheitstafel). Um $A \Rightarrow B$ zu beweisen wird die Gültigkeit von $\neg B$ angenommen und durch eine Kette von Schlüssen die Gültigkeit von $\neg A$ gefolgert.

Quantoren

Allquantor: $\forall A : B$ .... (Für alle A gilt B.)
Zum Beispiel: $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$

Existenzquantor: $\exists A : B$ ....(Es gibt ein A für das B gilt.)
Zum Beispiel: $\exists x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N}$

Negation von Aussagen mit Quantoren:
- Vertauschen von Allquantor und Existenzquantor
- Negieren der inneren Aussage

Zum Beispiel:

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N} : n > 0) \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} : n \leq 0$$

$$\neg(\exists x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{N}$$

Vollständige Induktion

Um eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n > n_0$ zu beweisen kann man wie folgt vorgehen (Verfahren der vollständigen Induktion):

- Induktionsstart: Man zeigt die Richtigkeit von $A(n_0)$.
- Induktionsschluss: Man zeigt, dass aus der Richtigkeit von $A(n)$ für $n \geq n_0$ die Richtigkeit von $A(n+1)$ folgt.

Der Induktionsschluss erfolg meist indem die Gleichung bzw. Ungleichung für $A(n)$ durch Äquivalenzumformung in die Form $A(n+1)$ gebracht wird.

Geometrische Summenformel und geometrische Reihen

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \qquad \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

(Der Grenzwert existiert nur wenn $|q| < 1$.)

Beweis:

$$\left.\begin{aligned} s_n &= q^0 + \cancel{q^1} + ... + \cancel{q^{n-1}} + \cancel{q^n} \\ s_n \cdot q &= \cancel{q^1} + \cancel{q^2} + ... + \cancel{q^n} + q^{n+1} \end{aligned}\right) -$$

$$\Longrightarrow \quad s_n(1-q) = q^0 - q^{n+1} \quad \Longrightarrow \quad s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Binomialkoeffizient

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ is der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Symetrieeigenschaften bzgl. $0 \leq k \leq n$**:**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n}, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

Additionstheorem:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Mathematik 1 für ET *# 8* *by Clifford Wolf*

Binomischer Lehrsatz

8 Antwort

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad \text{mit} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(Beweis mittels vollständiger Induktion nach n.)

D.h. für $(x+y)^n$ ist der Koeffizient von $x^a y^b$ gleich $\frac{n!}{a!b!}$.

Für $(x+y+z)^n$ ist der Koeffizient von $x^a y^b z^c$ gleich $\frac{n!}{a!b!c!}$.

Mathematik 1 für ET *# 9* *by Clifford Wolf*

Mengen und Mengenoperationen

9 Antwort

Menge = Zusammenfassung wohlunterscheidbarer *Elemente* zu einem Ganzen.

Aussagen über Mengen und Elemente:
$x \in \mathbb{M}$ .... x ist Element von $\mathbb{M}$
$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ .... $\mathbb{A}$ ist Teilmenge von $\mathbb{B}$
$\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ .... $\mathbb{A}$ ist (echte) Teilmenge von $\mathbb{B}$

Operation auf Mengen:
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ .... **Vereinigung:** $x \in (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{B})$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ .... **Durchschnitt:** $x \in (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{A}) \wedge (x \in \mathbb{B})$
$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$ .... **Differenz:** $x \in (\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{A}) \wedge (x \notin \mathbb{B})$
$\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ .... **Produktmenge:** $(a,b) \in (\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \Leftrightarrow (a \in \mathbb{A}) \wedge (b \in \mathbb{B})$

Komplement bzgl. einer Grundmenge $\mathbb{M}$: ...... $\mathbb{A}^c = M \setminus A$

Mathematik 1 für ET *# 10* *by Clifford Wolf*

Rechenregeln für Mengenoperationen

10 Antwort

Die Operationen $\cup$ und $\cap$ sind assoziativ und kommutativ.

Die Operationen $\cup$ und $\cap$ sind zueinander distributiv:

$$\mathbb{A} \cup (\mathbb{B} \cap \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \cap (\mathbb{A} \cup \mathbb{C})$$

$$\mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cup \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \cup (\mathbb{A} \cap \mathbb{C})$$

Die De Morgan'sche Regeln für Mengenoperationen:

$$(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})^c = \mathbb{A}^c \cap \mathbb{B}^c, \qquad (\mathbb{A} \cap \mathbb{B})^c = \mathbb{A}^c \cup \mathbb{B}^c$$

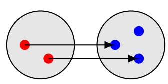
Mathematik 1 für ET *# 11* *by Clifford Wolf*

Arten von Abbildungen

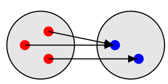
11 Antwort

Eine Abbildung $f: A \to B,\ a \mapsto b$ heisst:

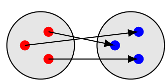
1. injektive Abbildung:
zu jedem b gibt es **maximal** ein a
(z.B.: $b = 2a$ mit $a, b \in \mathbb{N}$)



2. surjektive Abbildung:
zu jedem b gibt es **mindestens** ein a
(z.B.: $b = |a|$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}_0^+$)



3. bijektive Abbildung:
zu jedem b gibt es **genau** ein a
(z.B.: $b = -a$ mit $a, b \in \mathbb{R}$)



Äquivalenz und Abzählbarkeit von Mengen

Zwei Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ heißen **äquivalent**, wenn es eine bijektive Abbildung von $\mathbb{A}$ nach $\mathbb{B}$ gibt.

Eine Menge heißt **abzählbar**, wenn sie **äquivalent** zur Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist.

Eine Menge heißt **überabzählbar**, wenn sie weder endlich noch abzählbar ist.

Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ (u.v.m.) sind abzählbar.

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Rationale und reelle Zahlen

Die rationalen Zahlen sind die Menge $\mathbb{Q}$ der ganzzahligen Brüche. Jeder rationale Zahl kann auch als (endliche oder periodische) Dezimalzahl angeschrieben werden.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \right\}$$

Die reellen Zahlen sind die Menge $\mathbb{R}$ **aller** Zahlen auf der Zahlengeraden.

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Diejenigen reellen Zahlen die nicht in den rationalen Zahlen enthalten sind werden irrationale Zahlen genannt. Beispiele: $\sqrt{2}$, π, $\mathbf{e}$

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar und $\mathbb{R}$ überabzaehlbar mächtig.
(Beweis: 1. und 2. Cantor'sches Diagonalverfahren)

Intervallschachtelungsaxiom

Intervallschachtelung:
Eine Folge von Intervallen für die gilt:
- Jedes Intervall is im vorhergehenden enthalten
- Die Intervalllänge konvergiert gegen 0

Intervallschachtelungsaxiom:
Sei S eine Intervallschachtelung. Dann gibt es einen und nur einen Punkt der Zahlengeraden, der in allen Intervallen enthalten ist.

Bisektionsverfahren:
Verfahren zur Konstruktion einer Intervallschachtelung für denn Fall das die nur die Umkehrfunktion bekannt ist (z.Bsp. für $x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 = 2$): Es wird mit einem Intervall begonnen, in dem x enthalten ist, und dieses Intervall wird in jeder Iteration halbiert.

Rechengesetzte für die reellen Zahlen

Addition:
$x + (y + z) = (x + y) + z$ .... Assoziativgesetz
$x + y = y + x$ .... Kommutativgesetz
$x + 0 = x$ .... 0 ist das neutrale Element
$x + (-x) = 0$ .... Existenz des inversen Elements $(-x)$

Multiplikation:
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ .... Assoziativgesetz
$x \cdot y = y \cdot x$ .... Kommutativgesetz
$x \cdot 1 = x$ .... 1 ist das neutrale Element
$x \cdot x^{-1} = 1$ .... Existenz des inversen Elements x^{-1}

Kombination von Addition und Multiplikation:
$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ .... Distributivgesetz

Allgemein nennt man eine algebraische Struktur mit diesen Eigenschaften einen **Körper**. D.h. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Ungleichungen mit reellen Zahlen

Zur Konstruktion einer Ordnungsstruktur in $\mathbb{R}$ wird $\mathbb{R}$ zunächst in positive und negative Zahlen geteilt:

$$0 \leq x \iff x \in \mathbb{R}_0^+, \qquad 0 < x \iff x \in \mathbb{R}^+$$

Für alle Paare $x, y \in \mathbb{R}$ wird definiert:

$$\begin{aligned} x \leq y &\iff y = x + z, \quad 0 \leq z \\ x < y &\iff y = x + z, \quad 0 < z \end{aligned}$$

Die reellen Zahlen sind **geordnet**. Das heißt $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$x \leq x, \quad x \leq y \vee y \leq x, \quad x \leq y \wedge y \leq z \Longrightarrow x \leq z$$

Monotoniegesetze für Ungleichungen

Addition (und Subtraktion):
- $x \leq y \implies x + z \leq y + z$
- $x \leq y,\ u \leq v \implies x + u \leq y + v$
- $x < y,\ u \leq v \implies x + u < y + v$

Multiplikation (und Division):
- $x \leq y,\ z \geq 0 \implies x \cdot z \leq y \cdot z$
- $x \leq y,\ z \leq 0 \implies x \cdot z \geq y \cdot z$

Kehrwert:
- $0 < x < y \iff 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

Betrag und Signum reeller Zahlen

Der Betrag einer reellen Zahl ist ihr Abstand vom Nullpunkt:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Das Signum einer reellen Zahl ist ihr Vorzeichen:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ -1 & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Die Dreiecksungleichung

$\forall x, y \in \mathbb{R}$:

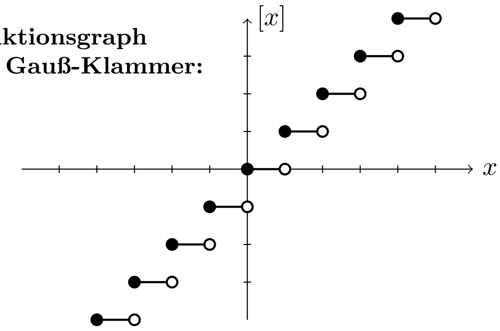
$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|$$

Die Gauß-Klammer

Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet $[x]$ bzw. $\lfloor x \rfloor$ die gröste ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Man nennt $[x]$ die **Gauß-Klammer-Funktion**.

Funktionsgraph der Gauß-Klammer:



Rechenregeln für die Potenzfunktion

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

Monotoniegesetzte der Potenz- und Exponentialfunktion

Exponentialfunktion zur Basis $a > 1$:

$$b_1 \leq b_2 \iff a^{b_1} \leq a^{b_2}$$

Exponentialfunktion zur Basis a mit $0 < a < 1$:

$$b_1 \leq b_2 \iff a^{b_1} \geq a^{b_2}$$

Potenzfunktion mit Exponenten $b > 0$:

$$0 < a_1 \leq a_2 \iff a_1^b \leq a_2^b$$

Potenzfunktion mit Exponenten $b < 0$:

$$0 < a_1 \leq a_2 \iff a_1^b \geq a_2^b$$

Beschränktheit von Mengen
Supremum und Infimum
Maximum und Minimum

Sei $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$:

$\mathbb{A}$ heißt **nach oben beschränkt** wenn es eine Zahl (**obere Schanke**) gibt die **grösser** ist als alle Elemente von $\mathbb{A}$.

$\mathbb{A}$ heißt **nach unten beschränkt** wenn es eine Zahl (**untere Schranke**) gibt die **kleiner** ist als alle Elemente von $\mathbb{A}$.

$\mathbb{A}$ heißt **bechränkt** wenn $\mathbb{A}$ nach oben und nach unten beschränkt ist.

Das **Supremum** von $\mathbb{A}$ ($\sup \mathbb{A}$) ist die kleinste obere Schranke von $\mathbb{A}$. Wenn $\sup \mathbb{A} \in \mathbb{A}$ dann heißt es das **Maximum** von $\mathbb{A}$ ($\max \mathbb{A}$).

Das **Infimum** von $\mathbb{A}$ ($\inf \mathbb{A}$) ist die grösste untere Schranke von $\mathbb{A}$. Wenn $\inf \mathbb{A} \in \mathbb{A}$ dann heißt es das **Minimum** von $\mathbb{A}$ ($\min \mathbb{A}$).

Vollständigkeit der reellen Zahlen:
Jede nach oben beschränkte nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.
Jede nach unten beschränkte nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.

Charakterisierung von Punkten in Teilmengen von $\mathbb{R}$

Sei $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{A}$. Sei weiters $K(x, \varepsilon)$ eine Epsilon-Umgebung um x und $K_\mathrm{r}(x, \varepsilon)$ eine reduzierte Epsilon-Umgebung um x:

innerer Punkt:
Es existiert ein $K(x, \varepsilon)$, so daß $K(x, \varepsilon) \subset \mathbb{A}$.

äusserer Punkt:
Es existiert ein $K(x, \varepsilon)$, so daß $K(x, \varepsilon) \subset \mathbb{A}^\mathrm{c}$.

Randpunkt:
Jedes $K(x, \varepsilon)$ beinhaltet Punkte aus $\mathbb{A}$ und aus $\mathbb{A}^\mathrm{c}$.

Häufingspunkt:
Jedes $K(x, \varepsilon)$ beinhaltet unendlich viele Punkte aus $\mathbb{A}$. $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ Jedes $K_\mathrm{r}(x, \varepsilon)$ beinhaltet mindestens einen Punkt aus $\mathbb{A}$.

isolierter Punkt:
Es existiert ein $K_\mathrm{r}(x, \varepsilon)$, so daß $K_\mathrm{r}(x, \varepsilon) \subset \mathbb{A}^\mathrm{c}$.

innerer Punkt $\Rightarrow$ Häufungspunkt, isolierter Punkt $\Rightarrow$ Randpunkt.

Offene und abgeschlossene Mengen

Eine Menge $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ heißt **offen**, wenn $\mathbb{A}$ nur aus inneren Punkten besteht. D.h. eine offene Menge beinhaltet keine Randpunkte.

Die Menge $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ heißt **abgeschlossen**, wenn $\mathbb{A}^\mathrm{c}$ offen ist. D.h. in einer abgeschlossenen Menge wird jedes Teilintervall von zwei Randpunkten beschränkt.

Ein Intervall $]a, b[$ (oft auch (a, b) geschrieben) heißt **offen**, wenn es keine Randpunkte beinhaltet.

Ein Intervall $[a, b]$ heißt **abgeschlossen**, wenn es von Randpunkten begrenzt wird.

Satz von Balzano - Weierstraß
Häufungspunkte beschränkter Teilmengen von $\mathbb{R}$

Satz von Balzano - Weierstraß:
Jede beschränkte unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis durch Intervallschachtelung:
Wird die Teilmenge von $\mathbb{R}$ halbiert so muss mindestens eine der beiden resultierenden Teilmengen wieder unendlich viele Elemente beinhalten. Wird die Halbierung jeweils für jene Teilmengen mit unendlich vielen Punkten bis ins unendliche wiederholt so bestimmt diese Intervallschachtelung die Häufungspunkte der Menge.

Notationen komplexer Zahlen und spezielle Operationen

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$, $r = |z|$ und $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$:

$z = a + b\mathbf{i}$ .... Komponentenschreibweise
$z = r\angle\varphi$ .... Polarschreibweise
$z = r \cdot (\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$ .... Trigonometrische Schreibweise
$z = r \cdot \mathbf{e}^{\varphi\mathbf{i}}$ .... Exponentialschreibweise (φ in rad)

Betrag und Argument:
$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \mathrm{Arg}(z) = \arctan\frac{b}{a}\ [+180°]$

Konjugiert komplexe Zahl:
$\overline{z} = a - b\mathbf{i}$ (Wegen $\mathbf{i}^2 = -1$ ist $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.)

Addition, multiplikation und division komplexer Zahlen

Seien $z_i \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $a_i = \mathrm{Re}(z_i)$, $b_i = \mathrm{Im}(z_i)$, $r_i = |z_i|$ und $\varphi_i = \mathrm{Arg}(z_i)$:

Addition komplexer Zahlen:

$z_0 = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i}$

Multiplikation komplexer Zahlen:

$z_0 = z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\mathbf{i}$

$z_0 = z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot \mathbf{e}^{(\varphi_1 + \varphi_2)\mathbf{i}} \quad (\varphi \text{ in rad})$

Division komplexer Zahlen:

$$z_0 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \mathbf{e}^{(\varphi_1 - \varphi_2)\mathbf{i}} \quad (\varphi \text{ in rad})$$

Sätze zu konjugiert komplexen Zahlen

Seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathbf{i}}(z - \overline{z})$$

$$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}, \qquad \overline{\overline{z}} = z$$

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

$$w \neq 0: \ \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, \qquad n \in \mathbb{Z}: \ \overline{z^n} = (\overline{z})^n$$

Sätze zum Betrag komplexer Zahlen

Seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen:

$$|z| \in \mathbb{R}_0^+, \qquad |z| \geq 0, \qquad |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$$

$$|w \cdot z| = |w| \cdot |z|, \qquad w \neq 0: \ \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

$$|z| = |\overline{z}| = |-z|, \qquad |w \pm z| \leq |w| + |z|$$

$$-|z| \leq \mathrm{Re}(z) \leq |z|, \qquad -|z| \leq \mathrm{Im}(z) \leq |z|$$

Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$ in rad und $n, k \in \mathbb{N}$:

Potenzen komplexer Zahlen:

$$z^n = |z|^n \cdot \mathbf{e}^{n\varphi\mathbf{i}}$$

Wurzeln komplexer Zahlen:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \mathbf{e}^{\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\mathbf{i}}$$

D.h. die n-te Wurzel einer komplexen Zahl hat n *Zweige* (Lösungen). Diese Lösungen bilden ein gleichseitiges n-Eck um den Nullpunkt in der komplexen Zahlenebene.

Zahlenfolgen und Konvergenz

Eine **Folge** a ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Eine **komplexe Folge** a ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Anstelle von $a(1)$, $a(2)$, ... werden die **Glieder** der Folge a meist als a_1, a_2, ... oder allgemein als a_n geschrieben.

Die Folge selbst wird oft als $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oder kurz $\{a_n\}$ bezeichnet.

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt **konvergent** wenn eine Zahl a existiert, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N(\varepsilon)$ existiert, so dass jedes a_n mit $n > N(\varepsilon)$ in der ε-Umgebung um a liegt:

$$(\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon) \implies \lim_{n\to\infty} = a$$

In diesem Fall heißt a **Grenzwert** von $\{a_n\}$. Jede konvergente Folge ist beschränkt. Eine nicht konvergente Folge heißt **divergent**.

Nullfolgen und
Folgen mit dem Grenzwert 1

Eine Folge mit dem Grenzwert 0 heißt **Nullfolge**.
Zwei wichtige Nullfolgen sind:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad |q| < 1 : \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} a_n - a = 0$$

Zwei wichtige Folgen mit dem Grenzwert 1 sind:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad q \in \mathbb{R}^+ : \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$$

Definition der Eulerschen Zahl
als Grenzwert einer Folge

Der Grenzwert

$$\mathbf{e} := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ist die **Eulersche Zahl** $\mathbf{e} \approx 2{,}718281828459...$.

Eine andere Darstellung von $\mathbf{e}$ ist die unendliche Summe

$$\mathbf{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} .$$

Die Grenzwertsätze:
Rechenoperationen für Folgen

Seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Folgen mit den Grenzwerten a und b:

Summen- und Differenzfolgen:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \pm \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a \pm b$$

Produktfolgen:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a \cdot b$$

Quotientenfolgen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b} \qquad \text{wenn } b_n \neq 0 \text{ und } b \neq 0$$

Cauchyfolgen

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt Cauchyfolge wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ gibt, so dass die Differenz zwischen jedem Paar von Folgengliedern $|a_n - a_m|$ mit $m, n \geq N(\varepsilon)$ kleiner ε ist:

$$(\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall m, n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon) \implies$$
$$\implies \{a_n\} \text{ ist eine Cauchyfolge}$$

Konvergenzkriterium von Cauchy:
Eine Folge $\{a_n\}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist. Mit dem Konvergenzkriterium von Cauchy kann die Konvergenz einer Folge ohne Kenntnis des Grenzwerts untersucht werden.

Konvergenz gegen Unendlich

Eine Folge $\{a_n\}$ heisst **konvergent gegen** ∞, wenn gilt:

$$\forall K > 0 : \exists N(K) : \forall n \geq N(K) : a_n \geq K \implies \lim_{n\to\infty} = \infty$$

D.h. eine Folge konvergiert gegen ∞, wenn die Folgenglieder a_n mit steigendem n beliebig groß werden.

Analog dazu wird Konvergenz gegen $-\infty$ definiert.

Achtung: z.B. Folgen der Form $\{1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, ...\}$ sind nicht konvergent, auch nicht gegen ∞.

Monotone Folgen

Eine Folge heißt **monoton wachsend**, wenn jedes Folgenglied kleiner-gleich seinem Nachfolger ist. Eine Folge heißt **streng monoton wachsend**, wenn jedes Folgenglied kleiner seinem Nachfolger ist.

Analog dazu werden **monoton fallende** und **streng monoton fallende** Folgen definiert.

Hauptsatz über monotone Folgen:
Eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge konvergiert gegen ihr Supremum.

Eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge konvergiert gegen ihr Infimum.

Einschließungsprinzip für Folgen

Einschließungsprinzip für Folgen:
Sind die Folgen $\{a_n\}$ und $\{c_n\}$ beide konvergent gegen denselben Grenzwert a und gilt für eine Folge $\{b_n\}$:

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \ \ \forall n \geq N \text{ für ein } N \in \mathbb{N},$$

so ist auch $\{b_n\}$ konvergent gegen a.

Argumentation: Mit steigendem n wird der Grenzwert von $\{b_n\}$ zwischen den Grenzwerten von $\{a_n\}$ und $\{c_n\}$ quasi „eingezwickt". Da die Grenzwerte von $\{a_n\}$ und $\{c_n\}$ beide a sind muss daher auch der Grenzwert von $\{b_n\}$ der Wert a sein.

Reihen und Konvergenz von Reihen

Eine **Reihe** ist eine unendliche Summe der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots, \qquad a_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}.$$

Die n-te Partialsumme einer Reihe s_n ist die endliche Summe der Form

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Die **Summe der Reihe** s ist der Grenzwert der Folge der Partialsummen:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Falls die Folge $\{s_n\}$ konvergent ist spricht man von einer **konvergenten Reihe**, ansonsten von einer **divergenten Reihe**. Die Glieder a_k einer konvergenten Reihe bilden eine Nullfolge.

Die Grösse $R_n = s - s_n$ heißt der **Reihenrest**. Eine Reihe konvergiert genau dann wenn $\{R_n\}$ eine Nullfolge ist.

Geometrische und harmonische Reihen

Eine **geometrische Reihe** ist eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$.

Eine geometrische Reihe konvergiert für $|q| < 1$ und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Im fall $|q| \geq 1$ divergiert die Reihe.

Eine **harmonische Reihe** ist eine Reihe der Form $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Die harmonische Reihe divergiert (konvergiert gegen ∞).

Reihen der Form $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

Reihen der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

sind konvergent für $\alpha > 1$ und divergent für $0 < \alpha \leq 1$.

Insbesondere ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Teleskopreihe

Eine Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ mit } a_k = b_k - b_{k+1}$$

heißt **Teleskopreihe**. Für die Partialsummen von Teleskopreihen gilt $s_n = b_1 - b_{n+1}$. Daher konvergiert die Teleskopreihe wenn die Reihe $\{b_n\}$ konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = b_1 - \lim_{k\to\infty} b_k$$

Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n-1}\right) = 1$$

Rechenregeln für konvergente Reihen

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$ konvergente Reihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = a \pm b$$

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c a_k = ca$$

Alternierende Reihe

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \text{ bzw. } \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

mit $a_k > 0$ heißt **alternierende Reihe**.

Konvergenzkriterium von Leibnitz:
Falls die Folge $\{a_k\}$ *monoton* gegen Null konvergiert, so ist die alternierende Reihe konvergent.

Absolut konvergente Reihen
Majoranten und Minoranten

Eine Reihe $\sum a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum |a_k|$ konvergent ist. Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Eine Reihe $\sum a_k$ mit positiven Gliedern heißt **Majorante** der Reihe $\sum b_k$, wenn ab einem gewissen Index M für alle $k \geq M$ gilt $|b_k| \leq a_k$.

Eine Reihe $\sum a_k$ mit positiven Gliedern heißt **Minorante** der Reihe $\sum b_k$, wenn ab einem gewissen Index M für alle $k \geq M$ gilt $|b_k| \geq a_k$.

Majorantenkriterium:
Eine Reihe die eine konvergente Majorante besitzt, ist absolut konvergent.

Minorantenkriterium:
Eine Reihe die eine divergente Minorante besitzt, ist *nicht* absolut konvergent.

Quotientenkriterium
für die Konvergenz von Reihen

Sei $\sum a_k$ eine Reihe. Falls ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\forall k \geq N$:

$$\begin{array}{ll} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1 & \Rightarrow \text{die Reihe ist absolut konvergent.} \\ \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 & \Rightarrow \text{die Reihe ist divergent.} \\ \text{sonst} & \Rightarrow \text{keine Aussage möglich} \end{array}$$

Falls der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = r$ existiert:

$$\begin{array}{ll} r < 1 & \Rightarrow \text{die Reihe ist absolut konvergent.} \\ r > 1 & \Rightarrow \text{die Reihe ist divergent.} \\ r = 1 & \Rightarrow \text{keine Aussage möglich} \end{array}$$

Wurzelkriterium
für die Konvergenz von Reihen

Sei $\sum a_k$ eine Reihe. Falls ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\forall k \geq N$:

$$\begin{array}{ll} \sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 & \Rightarrow \text{die Reihe ist absolut konvergent.} \\ \sqrt[k]{|a_k|} > 1 & \Rightarrow \text{die Reihe ist divergent.} \\ \text{sonst} & \Rightarrow \text{keine Aussage möglich} \end{array}$$

Falls der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = r$ existiert:

$$\begin{array}{ll} r < 1 & \Rightarrow \text{die Reihe ist absolut konvergent.} \\ r > 1 & \Rightarrow \text{die Reihe ist divergent.} \\ r = 1 & \Rightarrow \text{keine Aussage möglich} \end{array}$$

Cauchyprodukt von Reihen

Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = a$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = b$ Reihen. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l$$

die Cauchy'sche Produktreihe dieser beiden Reihen.

Existiert die Summe der Reihen a, b und c, so gilt:

$$c = a \cdot b$$

Reelle Funktionen

Reelle Funktionen sind Abbildungen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$.

$\mathbb{D}$ .... Definitionsbereich oder Urbildmenge von f
$x \in \mathbb{D}$ .... Argumente oder Urbilder von f

$\{f(x) : x \in \mathbb{D}\}$ .... Bildmenge von f
$f(x) : x \in \mathbb{D}$ .... Funktionswert von f an der Stelle x

Der **Graph** G_f einer reellen Funktion f:

$$G_f := \{(x, f(x)) | x \in \mathbb{D}\} \subset \mathbb{D} \times \mathbb{R}$$

Funktionen mit beschränkter Bildmenge nennt man beschränkt.

Periodische Funktion

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt **periodisch** mit der **Periode** $p > 0$, wenn

$$f(x + p) = f(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Meist interessiert man sich für die kleinste Periode $p > 0$.

Eine konstante Funktion ist periodisch mit jeder beliebigen Periode $p > 0$.

Beispiel:
$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi \;\; \forall \varphi \in \mathbb{R} \;\; \Rightarrow \;\; \sin$ ist 2π-periodisch.

Gerade und ungerade Funktionen

Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit $x \in \mathbb{D} \Leftrightarrow -x \in \mathbb{D}$:

Gerade Funktion:
Der Funktionsgraph einer geraden Funktion ist spiegelsymetrisch bezüglich der y-Achse:

$$f(x) = f(-x) \;\; \forall x \in \mathbb{D}$$

Ungerade Funktion:
Der Funktionsgraph einer ungeraden Funktion ist rotationssymetrisch bezüglich des Ursprungs:

$$f(x) = -f(-x) \;\; \forall x \in \mathbb{D}$$

Monotonie

$f(x)$ heißt auf dem Intervall $\mathbb{I}$ (mit $x_1, x_2 \in \mathbb{I}$)

streng monoton wachsend, wenn
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

streng monoton fallend, wenn
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

monoton wachsend, wenn
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

monoton fallend, wenn
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

ε-δ-Definition der Stetigkeit von Funktionen

ε-δ-Definition der Stetigkeit von Funktionen:
Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle c stetig, wenn es zu jeder ε-Umgebung um $f(c)$ in der Bildmenge eine passende δ-Umgebung um c in der Urbildmenge gibt:

$$(\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall c \in \mathbb{D} : |c - x| < \delta \Rightarrow |f(c) - f(x)| < \varepsilon) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad f \text{ ist stetig an der Stelle } c$$

Zum Beweis der Stetigkeit ist es ausreichend zu jedem ε ein aussreichend kleines δ anzugeben. Es muss nicht ein optimales (d.h. möglichst grosses) δ sein.

Charakterisierung der Stetigkeit von Funktionen mittels Folgen bzw. mittels Grenzwerte der Funktion

Charakterisierung der Stetigkeit mittels Folgen:
Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ ist genau dann an einer Stelle $c \in \mathbb{D}$ stetig, wenn für jede Folge $\{x_n\}$ die in $\mathbb{D}$ gegen c konvergiert die entsprechende Folge $\{f(x_n)\}$ in $\mathbb{R}$ gegen $f(c)$ konvergiert.

$$\left(\forall \{x_n | x_n \in \mathbb{D}\} : \lim_{x \to \infty} x_n = c \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x_n) = f(c)\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad f \text{ ist stetig an der Stelle } c$$

Charakterisierung der Stetigkeit mittels Grenzwerte:
Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ ist genau dann an einer Stelle $c \in \mathbb{D}$ stetig, wenn der linksseitige Grenzwert $f(c-)$ sowie der rechtsseitige Grenzwert $f(c+)$ existieren und $f(c) = f(c-) = f(c+)$ gilt.

Vorzeichenbeständigkeit stetiger Funktionen

Vorzeichenbeständigkeit stetiger Funktionen:
Wenn eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ an einer stetigen Stelle c einen Funktionswert $f(c) \neq 0$ hat, dann existiert eine δ-Umgebung um c so dass die Funktionswerte für alle Urbilder aus dieser δ-Umgebung um c das gleiche Vorzeichen wie $f(c)$ haben:

$$f(c) \neq 0 \quad \wedge \quad f \text{ stetig an der Stelle } c \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{D} : |x - c| < \delta \Rightarrow \operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(c))$$

Rechenregeln für stetige Funktionen

Sind $f(x)$ und $g(x)$ zwei an der Stelle c stetigen Funktionen, so sind auch folgende Funktionen an der Stelle c stetig:

1. $af(x) + bg(x) \quad a, b \in \mathbb{R}$
2. $f(x)g(x)$
3. $\frac{f(x)}{g(x)} \quad$ falls $g(c) \neq 0$

Wenn die Komposition $f \circ g$ definiert ist und g an der Stelle c stetig ist und f an der Stelle $g(c)$ stetig ist, dann ist $f(g(x))$ an der Stelle c ebenfalls stetig.

Grenzwerte von Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle c den **Grenzwert** α (in Zeichen: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \alpha$), wenn

1. eine reduzierte Epsilon-Umgebung $K_r(c, \varepsilon) \subset \mathbb{D}$ existiert und

2. für jede in $K_r(c, \varepsilon)$ gegen c konvergente Folge $\{x_n\}$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$$

linksseitiger Grenzwert (in Zeichen: $f(c-) = \lim_{x \to c-} f(x) = \alpha_l$):
Es extistiert ein Intervall $\mathbb{I} =]c-\varepsilon, c[\subset \mathbb{D}$ und für jede in $\mathbb{I}$ gegen c konvergente Folge $\{x_n\}$ gilt: $f(x_n)$ konvergiert gegen α_l.

rechtsseitiger Grenzwert (in Zeichen: $f(c+) = \lim_{x \to c+} f(x) = \alpha_r$):
Es extistiert ein Intervall $\mathbb{I} =]c, c+\varepsilon[\subset \mathbb{D}$ und für jede in $\mathbb{I}$ gegen c konvergente Folge $\{x_n\}$ gilt: $f(x_n)$ konvergiert gegen α_r.

Charakterisierung mittels ε-δ-Notation:
Natürlich kann man den (einseitigen) Grenzwert einer Funktion auch mittels ε-δ-Notation charakterisieren (siehe Karten „SBP Mathe Aufbaukurs 3“).

Typen von Unstetigkeitsstellen

Eine isolierte Stelle c an der eine Funktion **nicht definiert** oder **unstetig** ist nenn man eine **Singularität** der Funktion.

Sprungstelle:
Wenn $f(c-)$ und $f(c+)$ exisitieren und $f(c-) \neq f(c+)$ gilt, so spricht man von einer Sprungstelle mit Sprunghöhe $|f(c-) - f(c+)|$.

Hebbare Unstetigkeit:
Wenn $f(c-)$ und $f(c+)$ exisitieren und entweder $f(c)$ nicht definiert oder $f(c-) = f(c+) \neq f(c)$ ist, so spricht man von einer hebbaren Unstetigkeit.

Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt gleichmässig stetig auf $\mathbb{D}$, wenn es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ gilt $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Unterschied zur ε-δ-Definition zur Stetigkeit:
Bei ε-δ-Definition der Stetigkeit bezieht ist für jede Stelle $c \in \mathbb{D}$ ein $\delta(\varepsilon, c)$ anzugeben. Bei der gleichmäßigen Stetigkeit ist für ganz $\mathbb{D}$ nur ein $\delta(\varepsilon)$ anzugeben. Damit folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit auf $\mathbb{D}$ unmittelbar die Stetigkeit an jeder Stelle von $\mathbb{D}$.

Beispiel: Die Funktion $f(x) = 1/x$ ist auf $]0, \infty[$ stetig aber nicht gleichmäßig stetig. Auf $[a, \infty[$ mit $a > 0$ ist $f(x)$ jedoch stetig und auch gleichmäßig stetig.

Lipschitz Stetigkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig auf $\mathbb{D}$, wenn es eine **Libschitzkonstante** $L \geq 0$ gibt, so dass

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{D}.$$

Das heißt die Libschitzkonstante ist die maximale Steigung jeder Sekante des Funktionsgraphen in $\mathbb{D}$.

Aus der Libschitzstetigkeit folgt mit $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/L$ die gleichmässige Stetigkeit.

Stetigkeit auf abgeschlossenen Intervallen

Eine auf einem abgeschlossenen Intervall $\mathbb{I} = [a, b]$ stetige Funktion $f(x)$ ..

.. besitzt in diesem Intervall ein **Maximum** und ein **Minimum**. D.h. das Supremum ist tatsächlich ein Maximum und das Infimum tatsächlich ein Minimum. Damit ist natürlich f in $\mathbb{I}$ **beschränkt**.

.. nimmt jeden **Zwischenwert** zwischen ihrem Maximum und ihrem Minimum mindestens ein mal an.

.. ist gleichmäßig stetig auf $\mathbb{I}$ mit $\delta(\varepsilon) = \max(\{\delta(\varepsilon, c) \mid c \in \mathbb{I}\})$.

Umkehrfunktionen

Eine **bijektive** Funktion $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ besitzt eine **inverse Funktion** oder **Umkehrfunktion** $f^{-1} : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ mit

$$f(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x$$

Für eine umkehrbare Funktion f gilt stets:

$$f^{-1}\left(f(x)\right) \quad = \quad f\left(f^{-1}(x)\right) \quad = \quad x$$

Der Graph von f^{-1} ist der um die 1. Mediane (das ist die Gerade $x = y$) gespiegelte Graph von f.

Jede *stetige und streng monotone* Funktion ist umkehrbar.

Polynomfunktion

Eine **Polynomfunktion** (ein **Polynom**) $p(x)$ ist eine Funktion der Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Das Polynom hat den Grad n falls $a_n \neq 0$. Man schreibt $\text{Grad}(p) = n$.

Das Polynom heißt **reell** falls alle **Koeffizienten** a_k und das Argument x reell sind. Eine solche relle Polynomfunktion ist eine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Das Polynom heißt **komplex** falls die **Koeffizient** a_k oder das Argument x komplex sind. Eine solche komplexe Polynomfunktion ist eine Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Ein Argument x_0 mit der Eigenschaft $p(x_0) = 0$ heißt **Nullstelle** des Polynoms.

Die zentrale mathematische Frage bei der Untersuchung von Polynomen ist das Bestimmen der Nullstellen des Polynoms.

Fundamentalsatz der Algebra
Linearfaktoren von Polynomen

Fundamentalsatz der Algebra:
Jedes Polynom $p(x)$ vom Grad n hat genau n komplexe Nullstellen, wobei die Nullstellen in ihrer vielfachheit gezählt werden.

Abspalten eines Linearfaktors:
Sei $p(x)$ ein Polynom vom Grad n und a eine Nullstelle von $p(x)$, so existiert ein Polynom $q(x)$ vom Grad $n-1$, so dass $p(x) = (x-a)q(x)$. Der Term $(x-a)$ heißt **Linearfaktor** von $p(x)$. Der Vorgang des bestimmens von $q(x)$ heißt **abspalten** des Linearfaktors $x-a$ (bzw. abspalten der Nullstelle a).

Produktdarstellung (Faktorisierung):
Sei $p(x)$ ein Polynom mit r voneinander verschiedenen Nullstellen x_1 bis x_r, wobei n_i die Vielfachheit (Ordnung) der i-ten Nullstelle angibt, so gilt

$$p(x) = a_n (x-x_1)^{n_1} (x-x_2)^{n_2} \cdots (x-x_r)^{n_r}.$$

Im Fall $n_i = 1$ spricht man von einer einfachen, im Fall $n_i > 1$ von einer mehrfachen Nullstelle.

Komplexe Nullstellen von Polynomen
mit rein reellen Koeffizienten

Sei $p(x)$ ein Polynom mit ausschliesslich reellen Koeffizienten, so treten komplexe Nullstellen immer in Paaren zueinander konjungiert komplexer Zahlen auf.

Daraus folgt direkt, dass ein Polynom ungeraden Grades mindestens eine reelle Nullstelle besitzen muss.

Da das Produkt zweier zueinander konjungiert komplexer Zahlen immer reell ist können solche Paare komplexer Nullstellen in der Produktdarstellung auch als ihr (reelles) Produkt geschireben werden. Die resultierende Form der Produktdarstellung nennt man auch **reelle Faktorisierung** des Polynoms.

Horner Schema

Das **Horner Schema** ist eine einfache Methode zum Auswerten eines Polynoms $p(x)$ an einer Stelle α und Abspalten einer Nullstelle. Es basiert auf der Darstellung

$$p(x) = (((\cdot\cdot((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots)x + a_2)x + a_1)x + a_0.$$

Dabei wird in einer Tabelle dieser Ausdruck von innen nach aussen ausgewertet:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
α	$\underbrace{a_n}_{b_{n-1}}$	$\underbrace{\alpha b_{n-1} + a_{n-1}}_{b_{n-2}}$	$\underbrace{\alpha b_{n-2} + a_{n-2}}_{b_{n-3}}$	$\cdots$	$\underbrace{\alpha b_1 + a_1}_{b_0}$	$\underbrace{\alpha b_0 + a_0}_{p(\alpha)}$

Im Fall $p(x) = 0$ sind die Zahlen $b_{n-1}, \ldots, b_0$ die Koeffizienten des Polynoms $q(x)$ mit $p(x) = (x-\alpha)q(x)$.

Somit kann das Horner Schema verwendet werden um in einem Schritt zu Prüfen ob α eine Nullstelle von $p(x)$ ist und um den entsprechenden Linearfaktor $x-\alpha$ abzuspalten.

Algebraische Gleichungen

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades hat die Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0.$$

Algebraische Gleichungen ab dem 5. Grad können nicht durch allgemein gülte Formeln gelöst werden. Für Gleichungen 3. und 4. Grades gibt es Formeln, die wegen ihrer Komplexität aber nicht Stoff der LVA sind.

Lösungsformeln für Quadratische Gleichungen:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 + px + q = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

(Beweis mittels Erweitern auf vollständiges Quadrat.)
Der Term unter der Wurzel heißt **Diskriminante** D.
Für $D > 0$ gibt es zwei und für $D < 0$ keine reelle Lösungen.

Rationale Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten

Sind alle Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ eines Polynoms ganze Zahlen, dann gilt für alle eventuell vorhandenen rationalen Nullstellen p/q (p und q teilerfremd), dass p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n ist.

Insbesondere ist im Fall $a_n = 1$ auch $q = 1$ und damit sind alle rationalen Nullstellen Ganzzahlen und Teiler von a_0.

ACHTUNG: Die rationalen Nullstellen können natürlich auch negativ sein.

Generell gilt: Im Fall $a_0 = 0$ ist offensichtlich 0 eine Nullstelle des Polynoms.

Langrang'sche Interpolationsformel

Gegeben die $n+1$ Argumente $x_0, \ldots, x_n$ und die $n+1$ Funktionswerte $y_0, \ldots, y_n$. Gesucht ist die Polynomfunktion $p(x)$ maximal n-ten Grades mit $p(x_i) = y_i$.

Langrang'sche Interpolationsformel:

$$\varphi_i = \frac{\prod_{k=0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n} x - x_k}{\prod_{k=0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n} x_i - x_k}, \qquad p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_i$$

Merkregel: Damit eine Polynomfunktion entstehen kann muss der Nenner von φ_i ein Zahlenwert sein und nur der Zähler ist eine Funktion von x. Und da man nicht durch 0 dividieren kann muss man den Fall $k = i$ bei der Konstruktion von φ_i auslassen.

Rationale Funktionen und Polstellen

Eine Funktion $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind, heisst **rationale Funktion**. Der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von $R(x)$ ist $\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen von $q(x)$. Eine rationale Funktion ist auf ganz $\mathbb{D}$ stetig.

Polstelle:
Sei α ein Argument von $R(x)$ und Nullstelle von $q(x)$, $n > 0$ die Vielfachheit der Nullstelle $q(\alpha)$ und $k \geq 0$ die Vielfachheit der Nullstelle $p(\alpha)$ so gilt..

- im Fall $n > k$:
  α ist eine Polstelle von $R(x)$ mit $(n-k)$-ter Ordnung
- und im Fall $n \leq k$:
  α ist eine hebbare Unstetigkeit von $R(x)$.

Mathematik 1 für ET *# 72* *by Clifford Wolf*

Partialbruchzerlegung

72 Antwort

Die Partialbruchzerlegung ist eine standardisierte Darstellung rationaler Funktionen als Summe einfacher rationaler Funktionen der Form

$$\frac{A}{(x-\alpha)^j} \quad \text{und} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}.$$

Schritt 1: Der Ansatz
Zerlegen des Nennerpolynoms in die Linearfaktoren. Zu jedem linearfaktor wird ein Bruch erstellt. Sei α eine n-fache Nullstelle des Nennerpolynoms:

$$(x-\alpha)^n \quad \widehat{=} \quad \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{C}{(x-\alpha)^n}$$

Schritt 2: Bestimmen der Zähler
Durch Gleichsetzten von Ansatz und der rationalen Funktion können die Werte A, B, ... bestimmt werden. Entweder durch Koeffizientenvergleich oder durch einsetzen konkreter x-Werte.

Mathematik 1 für ET *# 73* *by Clifford Wolf*

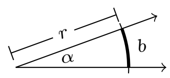
Winkel, Kreisbogen, Einheitskreis, Bogenmaß

73 Antwort

Der Winkel (eigentlich *ebener Drehwinkel*) ist eine skalare Grösse die die relative Lage zweier Strahlen in einer Ebene mit gemeinsamen Anfangspunkt beschreibt.

Drehwinkel können in Grad angegeben werden, wobei 360° einer vollen Drehung entsprechen. Bei 180° ergänzen sich beide Strahlen zu einer Geraden und bei 90° stehen beide Strahlen normal aufeinander.

Unter Wahl eines Radius r schliessen beide Strahlen einen Kreisbogen mit der Bogenlänge b ein:



Eine von Grad verschiedene Art Winkel zu vermessen ist das dimensionslose Bogenmass $\varphi = b/r$. Bei der Wahl von $r = 1$ (Einheitskreis) gilt somit $\varphi = b$.

$$\varphi = \frac{\alpha\pi}{180} \quad 360^\circ \,\widehat{=}\, 2\pi\,\text{rad} \quad 180^\circ \,\widehat{=}\, \pi\,\text{rad} \quad 90^\circ \,\widehat{=}\, \frac{\pi}{2}\,\text{rad}$$

Wegen der Periodizität des Kreises haben alle Winkelfunktionen eine 360° bzw. 2π rad Periode.

Mathematik 1 für ET *# 74* *by Clifford Wolf*

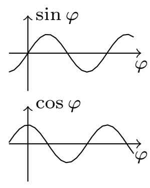
Sinus und Cosinus

74 Antwort

Gegeben ist ein Punkt $\mathrm{P} = (x, y)$ am Einheitskreis (Kreis zentriert am Ursprung mit Radius 1) unter Angabe des im Bogenmass gemessenen Winkels φ zwischen dem Strahl OP und der positiven x-Achse.

Definition von Sinus und Cosinus:

$$\cos(\varphi) : \mathbb{R} \to [-1; +1] : \varphi \mapsto x \qquad \sin(\varphi) : \mathbb{R} \to [-1; +1] : \varphi \mapsto y$$



- Sinus und Cosinus sind beide 2π-Periodisch.
- Sinus ist ungerade und Cosinus ist gerade.

$$\sin(\varphi+\pi) = -\sin\varphi, \quad \cos(\varphi+\pi) = -\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}), \quad \sin\varphi = \cos(x - \frac{\pi}{2})$$

- Sinus hat die Nullstellen $k\pi$ und Cosinus die Nullstellen $k\pi + \pi/2$ $(k \in \mathbb{Z})$
- Aus dem Satz des Pythagoras folgt: $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$

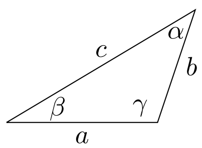
Mathematik 1 für ET *# 75* *by Clifford Wolf*

Sinussatz und Cosinussatz

75 Antwort

Sinussatz:
In einem Dreieck mit den Seiten a, b, c und den gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ gilt:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$



Cosinussatz:
In einem Dreieck mit den Seiten a, b, c und den gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

(Spezialfall $\gamma = 90^\circ$: $a^2 + b^2 = c^2$)

Mathematik 1 für ET *# 76* *by Clifford Wolf*

Summensätze für Sinus und Cosinus:
$\sin(x \pm y)$ und $\cos(x \pm y)$
(sowie Spezialfälle $x = y$)

\# 76 Antwort

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Mathematik 1 für ET *# 77* *by Clifford Wolf*

Summensätze: $\cos x \cos y$
(und Derivate sowie Spezialfälle $x = y$)

\# 77 Antwort

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$
$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$
$$2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y)$$

$$\cos^2 x = {}^1\!/_2\,(1 + \cos 2x)$$
$$\sin^2 x = {}^1\!/_2\,(1 - \cos 2x)$$

Mathematik 1 für ET *# 78* *by Clifford Wolf*

Summensätze für Sinus und Cosinus:
$\sin x \pm \sin y$ und Derivate

\# 78 Antwort

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

Mathematik 1 für ET *# 79* *by Clifford Wolf*

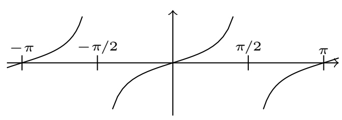
Tangens und Cotangens

\# 79 Antwort

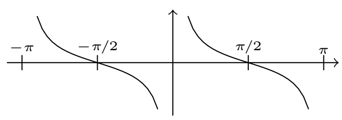
Die Funktionen Tangens und Cotangens sind folgendermassen definiert:

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \qquad \cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$$

Der Tangens hat eine Polstelle alle $k\pi + {}^\pi\!/_2$, ist ungerade und π-periodisch:



Der Cotangens hat eine Polstelle alle $k\pi$ und ebenfalls ungerade und π-periodisch:



Eigenschaften von Tangens und Cotangens

Eigenschaften von Tangens und Cotangens:

Beide Funktionen sind π-periodisch.

Beide Funktionen sind ungerade:

$$\tan\varphi = -\tan(-\varphi) \qquad \cot\varphi = -\cot(-\varphi)$$

$$\cot\varphi = \tan(\pi/2 - \varphi)$$

Additionstheorem:

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck

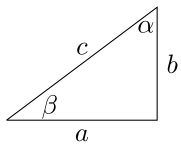
In rechtwinkeligen Dreieck mit den Seiten a, b, c und den gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ mit $\gamma = 90°$ gilt:

Sinus = Gegenkathete durch Hypothenuse:
$\sin\alpha = a/c$, $\sin\beta = b/c$

Cosinus = Ankathete durch Hypothenuse:
$\cos\alpha = b/c$, $\cos\beta = a/c$

Tangens = Gegenkathete durch Ankathete:
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = a/b$, $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = b/a$

Die „Sinus-Tangens-Ungleichung“:
$|\sin\varphi| \leq |\varphi| \leq |\tan\varphi| \quad \text{mit } \varphi \in [0; \pi/2[$



Werte der Winkelfunktionen für spezielle Winkel

Grad	rad	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—

Stetigkeit der Winkelfunktionen

Die Funktionen sin, cos, tan und cot sind auf ihren Definitionsbereichen stetig.

Die Funktion tan hat Pole 1. Ordnung an den Stellen

$$(k + 1/2)\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Die Funktion cot hat Pole 1. Ordnung an den Stellen

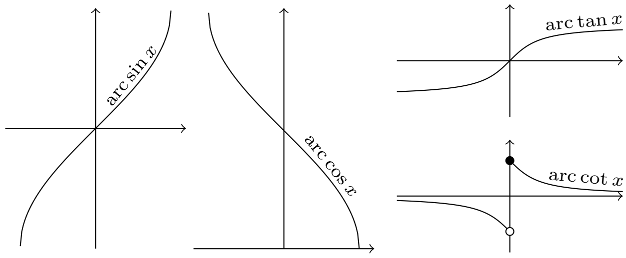
$$k\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Mathematik 1 für ET *# 84* *by Clifford Wolf*

Zyklometrische Funktionen

 # 84 Antwort

Die **Zyklometrische Funktionen** sind die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen. Wegen ihrer Periodizität sind die Winkelfunktionen nur auf Teilen ihrer Definitionsbereiche invertierbar.



$$\arcsin : [-1,+1] \to [-\pi/2, +\pi/2] \qquad \arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, +\pi/2[$$

$$\arccos : [-1,+1] \to [0,\pi] \qquad \operatorname{arc\,cot} : \mathbb{R} \to]-\pi/2, +\pi/2] \backslash \{0\}$$

Mathematik 1 für ET *# 85* *by Clifford Wolf*

Allgemeine Exponentialfunktion

 # 85 Antwort

Die **allgemeine Exponentialfunktion** zur **Basis** $a > 0$ ist definiert als

$$f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto a^x$$

und ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Für die allgemeine Exponentialfunktion gilt:

$$a^{x+y} = a^x a^y \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

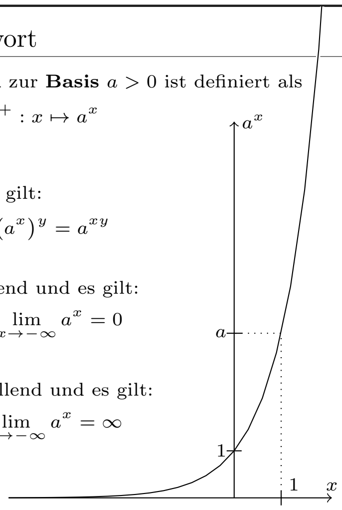
Für $a > 1$ ist a^x streng monoton wachsend und es gilt:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

Für $0 < a < 1$ ist a^x streng monoton fallend und es gilt:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$$

Für $a = 1$ ist $a^x = 1$ konstant.



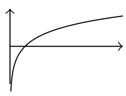
Mathematik 1 für ET *# 86* *by Clifford Wolf*

Allgemeine Logarithmusfunktion

 # 86 Antwort

Die **allgemeine Logarithmusfunktion** zur **Basis** $a > 0$ ist die Umkehrfunktion der allgem. Exponentialfunktion zur Basis a:

$$a^y = x \iff \log_a x = y$$



Rechenregeln für den Logarithmus:

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy \qquad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a(b^x) = x \log_a b \qquad \log_a c = (\log_a b)(\log_b c)$$

Wegen $a = \mathbf{e}^{\ln a}$ und $(\mathbf{e}^x)^y = \mathbf{e}^{xy}$ gilt: $a^x = \mathbf{e}^{x \ln a}$

Mathematik 1 für ET *# 87* *by Clifford Wolf*

Allgemeine Potenzfunktion

 # 87 Antwort

Die **allgemeine Potenzfunktion** zum **Exponenten** a ist definiert als die auf ganz $\mathbb{D}$ stetige Funktion $f(x) = x^a$.

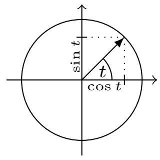
$a = 0$: $x^a = 1$ ist eine konstante Funktion.
$a \in \mathbb{Z}^+$: x^a ist ein auf $\mathbb{R}$ definiertes Polynom.
$a \in \mathbb{Z}^-$: x^a ist eine auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ definierte rationale Funktion.

$a \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{Z}$: Definitionsbereich und Bild von $f(x)$ ist $[0;\infty[$.
$a \in \mathbb{R}^-\backslash\mathbb{Z}$: Definitionsbereich und Bild von $f(x)$ ist $]0;\infty[$.

$a > 0$: x^a ist auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend
$a < 0$: x^a ist auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton fallend

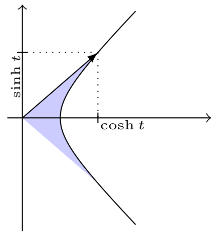
Hyperbelfunktionen
im Vergleich zu den Winkelfunktionen

Die **Winkelfunktionen** $y = \sin t$ und $x = \cos t$ bilden eine parametrische Darstellung eines Kreises ($x^2 + y^2 = 1$), wobei der Parameter t dem Winkel den der Ortsvektors des jeweiligen Punktes an der Kreisbahn zur positiven x-Achse bildet enspricht.



Die **Hyperbelfunktionen** $y = \sinh t$ und $x = \cosh t$ bilden eine parametrische Darstellung einer Hyperbel ($x^2 - y^2 = 1$), wobei der Parameter t der in der Abbildung hervorgehobenen Fläche entspricht.

Das erklärt auch den Namen Areafunktionen für die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen.



Die Hyperbelfunktionen

$$\cosh t = \frac{\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{-t}}{2} \qquad \sinh t = \frac{\mathbf{e}^t - \mathbf{e}^{-t}}{2}$$

$$\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t} \qquad \coth t = \frac{\cosh t}{\sinh t}$$

Die Funktionen cosh, sinh und tanh sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Die Funktion coth ist wegen $\sinh 0 = 0$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ definiert.

Eigenschaften der Hyperbelfunktionen

Die Hyperbelfunktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.

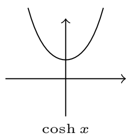
Die Funktion $\cosh t$ ist eine gerade Funktion.

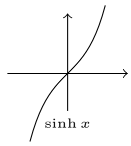
Die Funktionen $\sinh t$, $\tanh t$ und $\coth t$ sind ungerade.

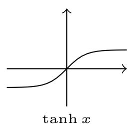
Die Funktion $\cosh t$ hat ein minimum bei $t = 0$. Sie ist auf $\mathbb{R}^+$ streng mononton steigend und auf $\mathbb{R}^-$ streng monoton fallend.

Die Funktionen $\sinh t$ und $\tanh t$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ strong monoton wachsend.

$$\lim_{t\to\pm\infty} \cosh t = \infty \qquad \lim_{t\to\pm\infty} \sinh t = \pm\infty \qquad \lim_{t\to\pm\infty} \tanh t = \pm 1$$







Identitäten und Additionstheoreme
der Hyperbelfunktionen

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$$

$$\mathbf{e}^x = \cosh x + \sinh x \qquad \mathbf{e}^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

Area sinus hyperbolicus
und Area cosinus hyperbolicus

Die Areafunktionen sind die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen:

$$\operatorname{arsinh} x: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \quad \sinh x \mapsto x$$
$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$\operatorname{arcosh} x: \quad [1;\infty[\;\to\; [0;\infty[: \quad \cosh x \mapsto x$$
$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

Area tangens hyperbolicus
und Area cotangens hyperbolicus

Die Areafunktionen sind die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen:

$$\operatorname{artanh} x: \quad]-1;+1[\;\to\; \mathbb{R}: \quad \tanh x \mapsto x$$
$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\operatorname{arcoth} x: \quad \mathbb{R}\backslash[-1;+1] \;\to\; \mathbb{R}: \quad \coth x \mapsto x$$
$$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

Differenzenquotient und
Differentialquotient

Differenzenquotient:
Der Differenzenquotient entspricht der Steigung der Sekante durch den Funktionsgraphen an den Stellen x und $z = x + h$:

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Differentialquotient:
Der Differentialquotient entspricht der Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen an der Stelle x. Der Differentialquotient ist der Differenzenquotient im Grenzwert $z \to x$ bzw. $h \to 0$:

$$\lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ableitung und Differenzierbarkeit

Eine reelle Funktion $f(x)$ heisst **differenzierbar an der Stelle** x wenn der Differentialquotient an dieser stelle existiert:

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Man bezeichnet $f'(x)$ als **Ableitung** von f an der Stelle x.

Existiert $f'(x)$ auf eunem ganzen Intervall $\mathbb{I}$, so sagt man $f(x)$ ist **differenzierbar** auf $\mathbb{I}$ und $f'(x)$ ist eine Funktion. Ist $f'(x)$ auf $\mathbb{I}$ stetig so sagt man, $f(x)$ ist **stetig differenzierbar** auf $\mathbb{I}$.

Andere übliche Bezeichnungen für die Ableitung von $y = f(x)$ sind:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x} f(x) \qquad \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} \qquad y' \qquad \dot{y}$$

Tangente und lineare Approximierbarkeit

Sei $f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar, dann ist die Tangente an $f(x)$ an der Stelle x_0 der Graph der Funktion

$$t(x) := f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Die Funktion $t(x)$ ist die **lineare Approximation** von $f(x)$ an der Stelle x_0. D.h. es gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - t(x)}{x - x_0} = 0$$

Die Funktion $t(x)$ genau dann an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn $f(x)$ an der Stelle x_0 linear approximierbar ist. Aus der linearen Approximierbarkeit von f folgt unmittelbar die Stetigkeit von f.

Die lineare Approximation wird u.A. in der Fehlerrechnung verwendet: $\quad y = f(x) \quad \Rightarrow \quad |\Delta y| \approx |f'(x_0)||\Delta x| \quad$ mit $x \approx x_0$

Ableitungen von Polynomfunktionen

Polynomfunktionen können mit den folgenden Regeln differenziert werden:

Ableitung von Summen:
$(a + b)' = a' + b'$

Ableitung der konstanten Funktion:
$f(x) = k \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$

Ableitung von konstanten Faktoren:
$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$

Ableitung von Potenzen:
$(x^n)' = nx^{n-1}$

Beispiel: $(5x^3 + 2x^2 - 3x + 8)' = 15x^2 + 4x - 3$

Differentialrechnung: Produktregel, Quotentenregel und Kettenregel

Produktregel der Differentialrechnung:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

Quotentenregel der Differentialrechnung:

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v = uv'}{v^2}$$

Kettenregel der Differentialrechnung:

$$\big(f(g(x))\big)' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ableitungen von Exponentialfunktion und Logarithmus

Natürliche Exponentialfunktion und Logarithmus:

$$(\mathbf{e}^x)' = \mathbf{e}^x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Allgemeine Exponentialfunktion:
Aus der Beziehung $a^x = \mathbf{e}^{x \ln a}$ und der Kettenregel folgt:

$$(a^x)' = a^x \ln x$$

Allgemeine Logarithmusfunktion:
Aus der Beziehung $\log_a x = \ln x / \ln a$ und der Regel über konstante Faktoren folgt:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Mathematik 1 für ET *# 100* *by Clifford Wolf*

Ableitung der inversen Funktion

 # 100 Antwort

Sei $f(x)$ eine reelle Funktion und $f^{-1}(x)$ ihr inverses. Sei weiters $f'(x)$ bekannt und $\left(f^{-1}(x)\right)'$ gesucht:

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Beispiel:
$f(x) = a^x, \quad f'(x) = a^x \ln a, \quad f^{-1}(x) = \log_a x \quad \Rightarrow$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Mathematik 1 für ET *# 101* *by Clifford Wolf*

Ableitungen der Winkelfunktionen

 # 101 Antwort

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\cot x)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

Mathematik 1 für ET *# 102* *by Clifford Wolf*

Ableitungen der Hyperbelfunktionen

 # 102 Antwort

$$(\sinh x)' = \cosh x \qquad (\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$(\coth x)' = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$$

Mathematik 1 für ET *# 103* *by Clifford Wolf*

Ableitungen der Arcusfunktionen

 # 103 Antwort

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{mit } x \in \left]-1;+1\right[$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{mit } x \in \left]-1;+1\right[$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2} \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Ableitungen der Areafunktionen

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \text{mit } x > 1$$

$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{mit } |x| < 1$$

$$(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{mit } |x| > 1$$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung und der Satz von Rolle

Sei $f(x)$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf $]a,b[$. Dann gibt es mindestens einen Punkt $c \in\,]a,b[$, so dass gilt

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

D.h. es gibt mindestens einen Punkt im Intervall $]a,b[$ an dem die Tangentensteigung gleich ist der Steigung der Sekante durch a und b.

Satz von Rolle (Spezialfall des Mittelwertsatzes):
Wenn $f(a) = f(b)$ so gibt es mindestens ein $c \in]a,b[$ mit $f'(c) = 0$.

Monotonieverfalten von Funktionen und Vorzeichen der Ableitung

Sei $f(x)$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf $]a,b[$.

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 \;\; \forall x \in\,]a,b[&\implies f \text{ streng mon. wachsend auf } [a,b] \\
f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in\,]a,b[&\implies f \text{ mon. wachsend auf } [a,b] \\
f'(x) = 0 \;\; \forall x \in\,]a,b[&\implies f \text{ konstant auf } [a,b] \\
f'(x) \leq 0 \;\; \forall x \in\,]a,b[&\implies f \text{ mon. fallend auf } [a,b] \\
f'(x) < 0 \;\; \forall x \in\,]a,b[&\implies f \text{ streng mon. fallend auf } [a,b]
\end{aligned}$$

Lipschitzstetigkeit stetig differenzierbarer Funktionen

Sei f stetig differenzierbar auf $[a,b]$. Dann ist f lipschitzstetig auf $[a,b]$, d.h.:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \;\; \leq \;\; L|x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in [a,b]$$

mit $L = \max\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$ als kleinstmögliche Lipschitzkonstante.

Beweis:
Da stetige Funktionen ihr Maximum annehmen (keine Polstellen besitzen) existiert $\max |f'(x)|$. Wegen dem Mittelwertsatz existiert jede Sekantensteigung auch als Wert der Ableitung. Damit muss das Maximum für die Ableitung auch das Supremum der Sekantensteigung sein.

Unbestimmte Formen
vom Typ $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$

Seien f und g Funktionen mit $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ mit $x \to c$, so gilt die **Regel von de l'Hospital** für unbestimmte Formen vom Typ $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

Analog dazu gilt für $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$ mit $x \to c$ die Regel von de l'Hospital für unbestimmte Formen vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

Dabei ist $\alpha = \pm\infty$ und $c = \pm\infty$ zugelassen.

Unbestimmte Formen
vom Typ $0 \cdot \infty$ und $\infty - \infty$

Seien f und g Funktionen mit $f(x) \to 0$ und $g(x) \to \infty$ mit $x \to c$, so kann man $f \cdot g$ in die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ umformen:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Seien f und g Funktionen mit $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$ mit $x \to c$, so kann man $f - g$ in die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ umformen:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

Unbestimmte Formen
vom Typ 1^∞, 0^0 und ∞^0

Für die unbestimmten Formen vom Typ 1^∞, 0^0 und ∞^0 verwendet man die Umformung

$$\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to c} \mathbf{e}^{\,g(x) \ln f(x)}.$$

Damit ergibt sich im Exponenten des rechten Ausdrucks die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$.

Der Ausdruck im Exponenten kann dann entsprechend weiter in die Form $\frac{0}{0}$ umgeformt werden.

Höhere Ableitungen

Falls die Ableitung f' an einer Stelle x differenzierbar ist heisst f and der Stelle x **zweimal differenzierbar** und $f''(x) = (f'(x))'$ heisst **zweite Ableitung** von $f(x)$.

Durch Induktion kann die k-te Ableitung ($k \in \mathbb{N}$) von $f(x)$ definiert werden:

$$f^{(k)}(x) := \left(f^{(k-1)}(x)\right)'$$

Eine Funktion heißt **unendlich oft differenzierbar**, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ die entsprechende Ableitung $f^{(k)}$ existiert.

Konvexe und konkave Funktionen

Konvexe Funktionen:
konvexe Funktionen sind linksgekrümmt. D.h. $f''(x) \geq 0$.
Bei **streng konvexen Funktionen** gilt $f''(x) > 0$.

Konkave Funktionen:
konkave Funktionen sind rechtsgekrümmt. D.h. $f''(x) \leq 0$.
Bei **streng konvexen Funktionen** gilt $f''(x) < 0$.

Treffen die oben genannten Kriterien auf die Funktion nur auf einem Intervall zu, so ist die Funktion auf diesem Intervall konvex bzw. konkav.

Taylorsche Lehrsatz

Für ein Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

gilt für bei $x = 0$

$$p(0) = a_0, \quad p'(0) = a_1, \quad p''(0) = 2a_2, \quad p'''(0) = 6a_3$$

und allgemein

$$p^{(k)} = k!\, a_k \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}_0.$$

Dieser Satz kann verwendet werden um eine Funktion von der die ersten n Ableitungen bekannt sind um $x = 0$ durch ein Polynom n-ter Ordung zu approximieren:

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1}\, x + \frac{p''(0)}{2}\, x^2 + \frac{p'''(0)}{6}\, x^3 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}\, x^n.$$

Der Fall $n = 1$ entspricht der linearen Approximation um $x = 0$.

Taylorentwicklung
und Restglied

Sei $f(x)$ eine in einer Umgebung von x_0 $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, so lässt sich $f(x)$ mit Hilfe der **Taylorschen Formel** in der Umgebung von x_0 durch das Taylorpolynom von f vom Grad n bei Entwicklung um x_0 approximieren:

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}\,(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n$$

Es gilt also $f(x) = p(x) + R_n(x)$ mit dem **Restglied** R_n:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(tx_0 + (1-t)x)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{(n+1)} \qquad \text{mit } t \in [0;1]$$

Dabei entspricht der Term $tx_0 + (1-t)x$ einem Punkt aus dem Intervall $[x_0; x]$. Beweis zu R_n mittels Mittelwertsatz.

$\mathcal{O}$-Notation für
das Restglied in der
Taylorentwicklung

Das Landau-Symbol $\mathcal{O}$ wird verwendet um eine Funktion grob anhand einer oberen Schranke für das asymptotische Verhalten der Funktion zu beschreiben, wobei konstante Faktoren in der Regel vernachlaessigt werden.

Damit kann man für das Restglied R_n einer Taylorentwicklung

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(tx_0 + (1-t)x)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{(n+1)} \qquad \text{mit } t \in [0;1]$$

vereinfachend schreiben:

$$R_n = \mathcal{O}\big((x - x_0)^{n+1}\big) \quad \text{bzw. auch} \quad R_n \in \mathcal{O}\big((x - x_0)^{n+1}\big)$$

Für weitere Umformungen ist es aber hilfreich gewisse Eigenschaften des Restgliedes (insbesondere: kein konstanter Summand) quasi „im Hinterkopf“ zu behalten.

Anmerkung: Es gibt weitere Landau-Symbole (wie z.Bsp. Ω für eine untere Schranke des asymptotische Verhalten einer Funktion), die für uns aber nur von untergeordnetem Interesse sind.

Taylorentwicklung
und Ordnung einer Nullstelle

Die Funktion $f(x)$ sei k-mal stetig differenzierbar in einer Umgebung von x_0. Die Stelle x_0 heisst **Nullstelle k-ter Ordnung** falls gilt:

$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0, \quad \dots, \quad f^{(k-1)}(x) = 0, \quad f^{(k)}(x) \neq 0$$

Argumentation: Da das Taylorpolynom k-ten Grades das $f(x)$ in der Umgebung von x_0 approximiert bei x_0 eine k-fache Nullstelle hat muss auch $f(x)$ eine k-fache Nullstelle bei x_0 besitzen.

Beispiel: Die Funktion $f(x) = 1 - \cos x$ hat bei $x = m\pi$ mit $m \in \mathbb{Z}$ Nullstellen zweiter Ordnung.

Definition: lokales
Maximum und Minimum

Sei $f(x)$ eine reellwertige Funktion, x_0 eine innere Stelle im Definitionsbereich von f und $K_\mathrm{r}(x_0, \varepsilon)$ eine Epsilon-Umgebung um x_0.

f besitzt an der Stelle x_0 ein **lokales Maximum**, falls ein ε existiert, so dass $f(x_0) \geq f(x) \ \ \forall x \in K_\mathrm{r}(x_0, \varepsilon)$ gilt.

f besitzt an der Stelle x_0 ein **lokales Minimum**, falls ein ε existiert, so dass $f(x_0) \leq f(x) \ \ \forall x \in K_\mathrm{r}(x_0, \varepsilon)$ gilt.

Wenn in den obenstehenden definitionen nicht nur $\geq$ bzw. $\leq$ sondern sogar $>$ bzw. $<$ gilt, so spricht man von einem **strikten** lokalem Maximum bzw. **strikten** lokalem Minimum.

Maxima und Minima werden unter dem Begriff **Extremstelle** zusammengefasst.

Lokale Extremstellen
und Ableitungen

Unter der Voraussetzung, dass die Funktion f hinreichend of stetig differenzierbar ist:

Sei $f(x)$ eine reellwertige Funktion und x_0 eine innere Stelle im Definitionsbereich von f mit $f'(x_0) = 0$. Sei weiters n die Ordnung der ersten Ableitung $\neq 0$. D.h.:

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Falls n gerade ist: f hat an der Stelle x_0 eine lokale Extremstelle.

- $f^{(n)}(x_0) > 0 \implies$ lokales Minimum
- $f^{(n)}(x_0) < 0 \implies$ lokales Maximum

Falls n ungerade ist: f hat an der Stelle x_0 einen Sattelpunkt.

Definition: Asymptotisches Verhalten

Die Aussage „$f(x)$ **verhält siche bei x_0 asymptotisch zu $g(x)$**“ oder kurz

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{für } x \to x_0$$

bedeutet

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

oder gleichbedeutend

$$f(x) = g(x)(1 + r(x)) \quad \text{mit } \lim_{x \to x_0} r(x) = 0$$

wobei insbesondere $x_0 = \pm\infty$ zulässig ist.

Definition: Asymptote

Eine **Asymptote** ist eine Gerade die die Funktion $f(x)$ für $x \to \infty$ (bzw. $x \to -\infty$) absolut approximiert. D.h. wenn

$$\lim_{x \to \pm\infty} |f(x) - (kx + d)| = 0$$

dann ist die Gerade $kx + d$ die Asymptote von f.

Ausser im Fall $k = d = 0$ ist die Asymptote immer auch asymptotisch zu $f(x)$.

Im Falle eines Pols bei $f(x_0)$ spricht man bei der Geraden $x = x_0$ auch von der **vertikalen Asymptote**.

Kurvendiskussion

Ziel einer Kurvendiskussion ist eine korrekte Darstellung und Beschreibung des Graphen einer Funktion f inklusive ihrer Singularitäten (Sprungstellen, Pole, Ecken, etc.). Dazu ermittelt man:

- den maximalen Definitionsbereich von f
- ob f gerade, ungerade und/oder periodisch ist
- die Nullstellen von f, f', und f''
- die Bereiche in denen f positiv bzw. negativ ist
- die Bereiche in denen f steigend bzw. fallend ist
- die Bereiche in denen f konvex bzw. konkav ist
- die lokalen Minima und Maxima von f
- die Wendepukte und Sattelpunkte von f
- die (eventuell Einseitigen) Grenzwerte an den Randpunkten
- das asymptotische Verhalten und eventuelle Asymptoten

Nullstellenprobleme und Fixpunktprobleme

Sei $f(x)$ eine Funktion.

Eine **Nullstelle** ist ein Wert x mit der Eigenschaft $f(x) = 0$.

Ein **Fixpunkt** ist ein Wert x mit der Eigenschaft $f(x) = x$.

Eine Gleichung $f(x) = b$ kann leicht in ein Nullstellenproblem oder ein Fixpunktproblem umgewandelt werden:

$$f(x) - b = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad x \pm (f(x) - b) = x$$

Es gibt gute numerische Methoden zur approximativen Berechnung von Nullstellen und Fixpunkten. Diese Methoden sind in der Regel **iterative Verfahren** die Ausgehend von einem Startwert eine rekursive Folge von Näherungswerten erzeugen.

Kontraktionen und Fixpunkte

Eine Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ nennt man **Kontraktion** wenn sie mit einer Lipschitzkonstante $L < 1$ Lipschitz-stetig ist:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2| \quad \forall\, x_1, x_2 \in [a, b]$$

Eine Kontraktion besitzt genau einen Fixpunkt p.

Für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$ konvergiert die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} = f(x_n)$ gegen den Fixpunkt p.

Diese Konvergenz ist midestens linear, d.h. es gilt

$$|x_n - p| \leq L^n |x_0 - p| \quad \text{mit } n \geq 0.$$

Anziehende und abstossende Fixpunkte

Sei f eine stetig differenzierbare Funktion und p ein Fixpunkt.

Im Fall $|f'(p)| < 1$ ist der Fixpunkt **anziehend**:

> Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für jeden Startwert $x_0 \in [p-\varepsilon, p+\varepsilon]$ die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} = f(x_n)$ gegen den Fixpunkt p konvergiert.

Im Fall $|f'(p)| > 1$ ist der Fixpunkt **abstossend**:

> Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für jeden Startwert $x_0 \in [p-\varepsilon, p+\varepsilon]$ der Abstang zwischen den Folgengliedern der rekursiv definierte Folge $x_{n+1} = f(x_n)$ und dem Fixpunkt p monoton wächst, bis nach endlich vielen Iteration die Folgenglieder ausserhalb des Intervalls $[p-\varepsilon, p+\varepsilon]$ liegen.

Newtonverfahren

Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ für eine differenzierbare reelle Funktion f. Ausgehend vom Startwert x_0 wird eine rekursive Folge $\{x_n\}$ von Näherungswerten ermittelt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Falls $\{x_n\}$ konvergiert so ist der Grenzwert $x^\star$ eine Lösung von $f(x) = 0$.

Falls f in einer Umgebung von $x^\star$ zweimal stetig differenzierbar ist und $f'(x) \neq 0$ gilt, so gibt es eine Umgebung um $x^\star$ in der das Newtonverfahren mindestens quadratisch konvergiert. D.h. es gibt ein $C > 0$ sodass

$$|x_{n+1} - x^\star| \leq C|x_n - x^\star|^2 \quad \text{gilt.}$$

Einzugsbereich eines Fixpunktes

Ein Iterationsverfahren habe einen Fixpunkt $x^\star$. Der **Einzugsbereich** von $x^\star$ ist die Menge aller Startwerte für die das Verfahren gegen $x^\star$ konvergiert.

Der Einzugsbereich ist zumindest eine (möglicherweise kleine) Umgebung von $x^\star$.

Die Hauptschwierigkeit bei Iterationsverfahren wie dem Newtonverfahren liegt daher in der Wahl eines geeigneten Startwertes.

Untersumme und Obersumme

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und T eine Zerlegung von $[a,b]$. Seien weiters m_i und M_i Infimum und Supremum von f im i-ten Teilabschnitt von T:

$$m_i := \inf_{x \in T_i} f(x), \qquad M_i := \sup_{x \in T_i} f(x)$$

Die **Untersumme** $U(f,T)$ und die **Obersumme** $O(f,T)$ sind definiert als

$$U(f,T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \qquad O(f,T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

wobei Δx_i die Breite des i-ten Teilabschnitt von T angibt.

Riemann Integral

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ beschraenkt.

Sei weiters $\mathbb{U}$ die Menge aller Untersummen $U(f, T)$ und $\mathbb{O}$ die Menge aller Obersummen $O(f, T)$ für alle Zerlegungen T des Intervalls $[a, b]$.

Falls $\sup \mathbb{U}$ und $\inf \mathbb{O}$ existieren und $\sup \mathbb{U} = \inf \mathbb{O}$ gilt, so ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x \quad := \quad \sup \mathbb{U} \quad = \quad \inf \mathbb{O}.$$

Integral als Grenzwert

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ integrierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x \quad = \quad \lim_{n\to\infty} U(f, T_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} O(f, T_n)$$

für jede **ausgezeichnete Zerlegungsfolge** $\{T_n\}$, d.h. für jede Folge $\{T_n\}$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} l(T_n) = 0,$$

wobei $l(T_n)$ die grösste Intervalllänge in T_n (die **Feinheit** von T_n) bezeichnet.

Integrierbarkeit von Funktionen

Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ unter anderem integrierbar, wenn

- f auf $[a, b]$ monoton ist.
- f auf $[a, b]$ stetig ist.
- f auf $[a, b]$ endlich viele Sprungstellen besitzt und sonst stetig ist.

Eigenschaften des Rieman Integtrals

Seien die Funktionen f und g über $[a, b]$ integrierbar, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x \;=\; -\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x$$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathbf{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathbf{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathbf{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathbf{d}x$$

Die Funktion $f \cdot g$ ist ebenfalls auf $[a, b]$ integrierbar.

Ungleichungen und Integrale

Seien die Funktionen f und g auf $[a, b]$ integrierbar, so gilt:

$$f(x) \;\leq\; g(x) \quad\Longrightarrow\quad \int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x \;\leq\; \int_a^b g(x)\,\mathbf{d}x$$

Ist $f(x)$ auf $[a, b]$ integrierbar, so ist auch $|f(x)|$ auf $[a, b]$ integrierbar und es gilt:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x\right| \quad\leq\quad \int_a^b |f(x)|\,\mathbf{d}x$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist $f(x)$ stetig auf $[a, b]$, so existiert ein $c \in [a, b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x \quad=\quad f(c)(b-a)$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** besagt, dass die Integration die Umkehrung der Differentiation ist:

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(u)\,\mathbf{d}u \quad\Rightarrow\quad F'(x) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\int_{x_0}^x f(u)\,\mathbf{d}u = f(x)$$

(Unter der Voraussetzung das $F(x)$ stetig differenzierbar ist und der wahl eines beliebigen x_0.)

Mit der Kenntnis von $F(x)$ für ein beliebiges x_0 kann jedes Integral von $f(x)$ gelöst werden:

$$\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x \quad=\quad F(b) - F(a) \quad=:\quad F(x)\Big|_a^b$$

Stammfunktionen und unbestimmte Integrale

Sei $f(x)$ stetig auf $\mathbb{I}$. Jede auf $\mathbb{I}$ stetig differenzierbare Funktion $F(x)$ mit

$$F'(x) = f(x)$$

nennt man **Stammfunktion** von $f(x)$.

Die Gesamtheit aller Stammfunktionen von $f(x)$ nennt man **unbestimmtes Integral** von $f(x)$ und schreibt dafür

$$\int f(x)\,\mathbf{d}x \quad=\quad F(x) + C$$

wobei C **Integrationskonstante** genannt wird.

Falls $f(x)$ Singularitäten besitzt so ist für jedes stetige Teilstück von $\mathbb{I}$ eine eigene Integrationskonstante anzugeben, damit die Lösung des unbestimmten Integrals die Gesamtheit aller Stammfunktionen beinhaltet.

Stammfunktionen
von Polynomfunktionen
und Potenzen

Wegen der **linearität** des Integraloperators bezüglich des Integranten gilt:

$$\int \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right) \mathbf{d}x \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} \left(a_i \int x^i \, \mathbf{d}x \right)$$

Des weiteren gilt allgemein für x^α:

$$\int x^\alpha \, \mathbf{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \int \frac{1}{x} \, \mathbf{d}x = \ln|x| + C$$

Stammfunktionen
aus den Ableitungen
der trigonometrischen
Funktionen

$$\int \cos x \, \mathbf{d}x \quad = \quad \sin x + C$$

$$\int \sin x \, \mathbf{d}x \quad = \quad -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathbf{d}x \quad = \quad \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathbf{d}x \quad = \quad -\cot x + C$$

Stammfunktionen
aus den Ableitungen
der zyklometrischen
Funktionen

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \quad = \quad \arcsin x + C$$

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{1+x^2} \quad = \quad \arctan x + C$$

Stammfunktion
der Exponentialfunktion

$$\int \mathbf{e}^x \, \mathbf{d}x \quad = \quad \mathbf{e}^x + C$$

$$\int a^x \, \mathbf{d}x \quad = \quad \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Stammfunktionen
aus den Ableitungen
der Hyperbelfunktionen

$$\int \cosh x \, \mathbf{d}x \quad = \quad \sinh x + C$$

$$\int \sinh x \, \mathbf{d}x \quad = \quad \cosh x + C$$

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{\cosh^2 x} \quad = \quad \tanh x + C$$

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{\sinh^2 x} \quad = \quad -\coth x + C$$

Stammfunktionen
aus den Ableitungen
der Areafunktionen

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{\sqrt{x^2+1}} \quad = \quad \operatorname{arsinh} x + C$$

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{\sqrt{x^2-1}} \quad = \quad \operatorname{arcosh} x + C \qquad \text{mit } |x| > 1$$

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{1-x^2} \quad = \quad \operatorname{artanh} x + C \qquad \text{mit } |x| < 1$$

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{1-x^2} \quad = \quad \operatorname{arcoth} x + C \qquad \text{mit } |x| > 1$$

Partielle Integration

Aus der Produktregel $(uv)' = u'v + uv'$ folgt:

$$\int uv' \, \mathbf{d}x \quad = \quad uv - \int u'v \, \mathbf{d}x + C$$

Bzw. für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, \mathbf{d}x \quad = \quad u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, \mathbf{d}x$$

Substitutionsregel

Aus der Kettenregel $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x} u(v(x)) = u'(v(x))v'(x)$ folgt die Substitutionsregel:

$$\int f(g(x))g'(x) \, \mathbf{d}x \quad = \quad F(g(x)) + C$$

Bzw.:

$$\int f(g(x)) \, \mathbf{d}x \quad = \quad \int f(u) \frac{\mathbf{d}u}{g'(x)}$$

Erklärung: Aus der Substitution $u = g(x)$ folgt

$$\frac{\mathbf{d}u}{\mathbf{d}x} = g'(x) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d}x = \frac{\mathbf{d}u}{g'(x)}.$$

Bei bestimmten Integralen kann g direkt in die Grenzen eingesetzt werden:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, \mathbf{d}x \quad = \quad \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, \mathbf{d}u \quad = \quad F(g(b)) - F(g(a))$$

Erweitern durch Substitution

Gesucht ist $F(x) = \int f(x)\,\mathbf{d}x$, wobei $H(u) = \int f(g(u))g'(u)\,\mathbf{d}u$ bekannt ist.

Durch die Substitution $x = g(u)$ kommt man zu

$$F(g(u)) = H(u) = \int f(g(u))g'(u)\,\mathbf{d}u.$$

Durch Rücksubstitution mit

$$x = g(u) \implies g^{-1}(x) = g^{-1}(g(u)) = u$$

kommt man zum gesuchten Resultat

$$F(x) = H(g^{-1}(x)).$$

Lösungsstrategie für

$\int \frac{\mathbf{d}x}{ax^2+bx+c}, \qquad a \neq 0$

Gesucht ist $I(x) = \int \frac{\mathbf{d}x}{ax^2+bx+c}$ mit $a \neq 0$.

Durch Erweiterung aufs vollständige Quadrat $ax^2 + bx + c = \pm(Ax + B)^2 \pm C$ gelangt man zu

$$I(x) = \pm\frac{1}{C}\int \frac{\mathbf{d}x}{1 \pm \left(\frac{Ax+B}{\sqrt{C}}\right)^2}$$

bzw. im Fall $C = 0$ zu

$$I(x) = \pm\int \frac{\mathbf{d}x}{(Ax + B)^2}.$$

Diese Integrale lassen sich mit der Substitution $u(x) = (Ax + B)/\sqrt{C}$ bzw. im Fall $C = 0$ mit $u(x) = Ax + B$ lösen.

Lösungsstrategie für

$\int \frac{\mathbf{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad a \neq 0$

Gesucht ist $I(x) = \int \frac{\mathbf{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ mit $a \neq 0$.

Durch Erweiterung aufs vollständige Quadrat $ax^2 + bx + c = \pm(Ax + B)^2 \pm C$ gelangt man zu

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{C}}\int \frac{\mathbf{d}x}{\sqrt{\pm\left(\frac{Ax+B}{\sqrt{C}}\right)^2 \pm 1}}$$

bzw. im Fall $C = 0$ zu

$$I(x) = \pm\int \frac{\mathbf{d}x}{Ax + B}.$$

Diese Integrale lassen sich mit der Substitution $u(x) = (Ax + B)/\sqrt{C}$ bzw. im Fall $C = 0$ mit $u(x) = (Ax + B)$ lösen.

Integrale von rationalen Funktionen

Jede rationale Funktion kann durch Partialbruchzerlegung in eine Summe von einfachen rationalen Funktionen zerlegt werden. Diese kann man wie folgt für jeden Summanden einzeln integrieren:

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^j}\,\mathbf{d}x = \begin{cases} \frac{A}{1-j}(x-\alpha)^{1-j}, & j > 1 \\ A \cdot \ln|x-\alpha|, & j = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^j}\,\mathbf{d}x = I_1 + I_2 \qquad \text{mit}$$

$$I_1 = \frac{B}{2}\int \frac{2x + \beta}{(x^2 + \beta x + \gamma)^j}\,\mathbf{d}x, \qquad I_2 = \left(C - \frac{B\beta}{2}\right)\int \frac{\mathbf{d}x}{(x^2 + \beta x + \gamma)^j}$$

Uneigentliche Integrale

Integrale mit offenen (insbesondere unbeschränkten) Integrationsintervallen nennt man **uneigentliche Integrale**. Sie werden gelöst indem das Integral für ein variables Ende des des Integrationsintervalls gelöst und der Grenzwert von diesem Ausdruck bestimmt wird. Zum Beispiel:

$$\int_a^\infty f(t)\,\mathbf{d}t \quad = \quad \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,\mathbf{d}t$$

Für das Integrationsintervall $]-\infty; +\infty[$ gilt

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\,\mathbf{d}t \quad := \quad \int_{-\infty}^c f(t)\,\mathbf{d}t \quad + \quad \int_c^\infty f(t)\,\mathbf{d}t$$

unter der Voraussetzung das die beiden Integrale auf der rechten Seite unabhänig voneinander konvergieren.

Definition: Potenzreihen

Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Zahlenfolge und $x, x_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$f(x) := \sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$$

komplexe Potenzreihe mit der **Anschlusstelle** x_0.

Im Fall $a_n, x, x_0 \in \mathbb{R}$ spricht man von einer **reellen Potenzreihe**. Da der komplexe Fall den reellen beinhaltet werden Potenzreihen am besten gleich im Komplexen untersucht.

Es reicht den Fall $x_0 = 0$ zu untersuchen, da der allgemeine Fall durch die Substitution $x' := x - x_0$ auf den Fall $x_0 = 0$ reduziert werden kann.

Konvergenzsatz für Potenzreihen

Für eine (komplexe) Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ gilt eine der folgenden Aussagen:

- Die Reihe konvergiert nur für $x = x_0$.
- Die Reihe konvergiert absolut für alle x.
- Es gibt eine reelle Zahl $R > 0$, so dass die Reihe für alle x mit $|x - x_0| < R$ absolut konvergiert und für alle x mit $|x - x_0| > R$ divergiert.

Die Zahl R heisst **Konvergenzradius** der Reihe und die Menge $\{x \in \mathbb{C}; |x - x_0| < R\}$ heisst **Konvergenzkreis** der Reihe.

Bestimmung des
Konvergenzradius für Potenzreihen
(Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ eine komplexe Potenzeihe und R ihr Konvergenzradius.

Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_+$:

$$\Longrightarrow \qquad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$:

$$\Longrightarrow \qquad R = \infty$$

Wenn die Folge $\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}$ unbeschränkt ist:

$$\Longrightarrow \qquad R = 0$$

Bestimmung des
Konvergenzradius für Potenzreihen
(Quotientenkriterium)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine komplexe Potenzeihe und R ihr Konvergenzradius.

Wenn $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \mathbb{R}_+$:

$$\implies \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

Wenn $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$:

$$\implies \quad R = \infty$$

Wenn die Folge $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ unbeschränkt ist:

$$\implies \quad R = 0$$

Linerakombinationen
und Produkte
von Potenzreihen

Im wesentlichen kann mit Potenzreihen innerhalb des gemeinsamen Konvergenzradius wie mit Polynomen gerechnet werden.

Seien $f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $f_2(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen:

$$\alpha f_1(z) + \beta f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) z^n$$

$$f_1(z)\cdot f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Wobei $\sum c_n$ die Cauchy'sche Produktreihe von $\sum a_n$ und $\sum b_n$ darstellt.

Quotienten von Potenzreihen

Seien $f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $f_2(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen:

Der Quotient $f(z) = f_1(z)/f_2(z)$ ist definiert, falls $b_0 \neq 0$ ist.

Ausgehend vom Ansatz $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ wird

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)$$

ausmultipliziert und die Koeffizienten c_n werden durch Koeffizientenvergleich bestimmt.

Integration und Differentiation
von Potenzreihen

Konvergente Potenzreihen dürfen innerhalb ihres Konvergenzradius **gliederweise** differenziert und integriert werden.

Sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

$$\int f(x)\,\mathbf{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

Taylorreihen

Sei $f(x)$ eine an der Stelle x_0 beliebig oft differentierbare Funktion. Dann nennt man die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad \text{mit } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

die Taylorreihe von f mit der Anschlussstelle x_0.

Eine Taylorreihe einer Funktion f konvergiert genau dann an einer Stelle x gegen $f(x)$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

gilt, wobei $R_n(x)$ das Restglied aus der Taylorschen Formel (Karte 114) ist. D.h. insbesondere, dass wenn die Taylorreihe an einer Stelle x konvergiert, sie nicht unbedingt gegen $f(x)$ konvergieren muss.

Taylorreihe der Exponentialfunktion an der Anschlussstelle $x_0 = 0$

Sei $f(x) = \mathbf{e}^x$. Wegen $f^{(n)}(x) = \mathbf{e}^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$ ist die Taylorreihe an der Anschlussstelle $x_0 = 0$

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

gleich

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Der Konvergezradius dieser Reihe ist unendlich und das Restglied konvergiert fuer alle $x \in \mathbb{R}$ gegen 0. Damit gilt:

$$f(x) = \mathbf{e}^x = t(x)$$

Taylorreihen der Trigonometrischen Funktionen an der Anschlussstelle $x_0 = 0$

Die Ableitungen von $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x = 0$ sind:

$$\{f^{(n)}(0)\} = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots\} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

Die Ableitungen von $f(x) = \cos x$ an der Stelle $x = 0$ sind:

$$\{f^{(n)}(0)\} = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots\} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wir erhalten die Taylorreihen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Die für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen die jeweilige Funktion konvergieren.

Taylorreihen der Hyperbelfunktionen an der Anschlussstelle $x_0 = 0$

Die Ableitungen von $f(x) = \sinh x$ an der Stelle $x = 0$ sind:

$$\{f^{(n)}(0)\} = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

Die Ableitungen von $f(x) = \cosh x$ an der Stelle $x = 0$ sind:

$$\{f^{(n)}(0)\} = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wir erhalten die Taylorreihen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Die für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen die jeweilige Funktion konvergieren.

Taylorreihe der Logarithmusfunktion an der Anschlussstellen $x_0 = 1$

Die Ableitungen von $f(x) = \ln x$ lauten

$$\{f^{(n)}(x)\} = \{\ln x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x^2}, \frac{2}{x^3}, \frac{2\cdot 3}{x^4} \ldots\} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \ldots$$

oder allgemein

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Damit erhalten wir an der Anschlussstelle $x_0 = 1$:

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

Mit dem Konvergenzradius $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n}{n+1}\right|} = 1.$

Taylorreihe des Arcus Tangens im Intervall $x \in [-1; +1]$

Sei $|x| \leq 1$. Durch gliederweise Integration der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + z^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2}$$

folgt

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \int_0^x \frac{\mathbf{d}t}{1+t^2} = \arctan x.$$

D.h. für $-1 \leq x \leq 1$ darf man schreiben

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Für $|x| > 1$ divergiert die Reihe.

Binomische Reihe

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$. Dann gilt für die Taylorreihe von $f(x) = (1+x)^a$ an der Anschlussstellen $x_0 = 1$

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n.$$

Für $|x| \geq 1$ divergiert die Reihe.

Eulersche Identität

Die Taylorreihen der elementaren Funktionen können dazu verwendet werden die elementaren Funktionen ins komplexe fortzusetzen. Aus der Reihendarstellung der Winkelfunktionen und Hyperbelfunktionen folgt:

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}z} = \cos z + \mathbf{i}\sin z, \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\cosh(\mathbf{i}z) = \cos z, \qquad z\sinh(\mathbf{i}z) = \mathbf{i}\sin z$$

Wobei $z \in \mathbb{R}$ natürlich zulässig ist.

Durch Einsetzen von $x = \pi$ folgt die berühmte Formel

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi} + 1 = 0.$$