Elektrotechnik 1 für ET

Diese Lernkarten sind sorgfältig erstellt worden, erheben aber weder Anspruch auf Richtigkeit noch auf Vollständigkeit.

Das Lernen mit Lernkarten funktioniert nur wenn die Inhalte bereits einmal verstanden worden sind. Ich warne davor diese Lernkarten nur stur auswendig zu lernen.

Diese und andere Lernkarten können von

`http://www.clifford.at/zettelkasten/`

heruntergeladen werden.

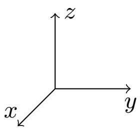
Viel Erfolg bei der **Elektrotechnik 1 für ET** Prüfung!

Clifford Wolf <clifford@clifford.at>

Rechtssystem bzw. rechtshändiges Koordinatensystem

Ein kartesisches Koordinatensystem im $\mathbb{R}^3$ heißt *Rechtssystem*, wenn die positive x-Achse zur positiven y-Achse gedreht die positive z-Achse im Sinn einer Rechtsschraube ergibt.

Auch *Rechtshändiges Koordinatensystem*, denn wenn man Daumen und Zeigefinger der rechten Hand ausstreckt („Pistole") und den Mittelfinger der rechten Hand normal zur Handfläche wegstreckt, so entspricht der Daumen der positiven x-Achse, der Zeigefinger der positiven y-Achse und der Mittelfinger der positiven z-Achse.



(Das Arbeiten mit Vektoren im $\mathbb{R}^3$ wird in den Karten „SBP Mathematik – Aufbaukurs 2" sowie „Mathematik 2 für ET" bereits gründlich behandelt und daher hier nicht wiederholt.)

Zeit und Raum

Die SI-Einheit der Zeit ist die Sekunde:

$$[t] = 1\,\mathrm{s}$$

Die SI-Einheit der Länge (Strecke) ist das Meter:

$$[l] = 1\,\mathrm{m}$$

Strecken im Raum werden durch Vektoren des $\mathbb{R}^3$ angeschrieben.

Zur vereinfachten Schreibweise wird häufig die Bezeichnung eines Punktes stellvertretend für seinen Ortsvektor verwendet.

z.B. Vektor $\vec{s}$ von $\mathcal{P}_1$ nach $\mathcal{P}_2$:

$$\vec{s} = \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1 = \overrightarrow{\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2}$$

Bewegung und Beschleunigung

Bewegung/Geschwindigkeit ist die Ortsänderung pro Zeiteinheit:

$$\vec{v} = \frac{\mathbf{d}\mathcal{P}}{\mathbf{d}t} = \dot{\mathcal{P}}, \qquad [\vec{v}] = 1\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!{}_{\mathrm{s}}$$

Beschleunigung ist die Bewegungsänderung pro Zeiteinheit:

$$\vec{a} = \frac{\mathbf{d}\vec{v}}{\mathbf{d}t} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\mathcal{P}}, \qquad [\vec{a}] = 1\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!{}_{\mathrm{s}^2}$$

Hinweis: Im Englischen wird streng zwischen „velocity“ (Bewegung als gerichtete Größe) und „speed’”(Betrag der Geschwindigkeit) unterschieden. Im Deutschen ist diese sprachliche Unterscheidung nicht so streng. Umso wichtiger ist es, die Symbole für die gerichtete Größe $\vec{v}$ und die ungerichtete Größe v nicht durcheinander zu bringen.

Die Masse eines Körpers

Die SI-Einheit der Masse ist das Kilogramm:

$$[m] = 1\,\mathrm{kg}$$

Massen sind stets positiv und die Massen der Teilkörper ergeben addiert die Masse des Gesamtkörpers.

Die Masse eines Körpers äußert sich in zwei physikalischen Eigenschaften:

- Die träge Masse, die bewirkt, dass ein Körper proportional zu seiner Masse bestrebt ist seine derzeitige Bewegung beizubehalten und
- die schwere Masse, die bewirkt, dass sich zwei Körper proportional zum Produkt ihrer Massen (und indirekt proportional zum Quadrat ihrer Entfernung) gegenseitig anziehen.

Stoffmenge

Die *Stoffmenge* n bezeichnet die Anzahl der Partikel in einem Körper, wobei die exakte Definition von *Partikel* aus dem jeweiligen Kontext heraus verschieden ist (z.B. Anzahl der Atome, Ionen oder Moleküle).

$$[n] = 1\,\mathrm{mol}$$

Dabei ist $1\,\mathrm{mol}$ die Anzahl der Atome in $12\,\mathrm{g}$ des Kohlenstoffisotops $^{12}\mathrm{C}$. Diese Zahl wird durch die *Avogadro-Konstante* N_A festgehalten:

$$N_\mathrm{A} \approx 6{,}022 \cdot 10^{23}\ {}^{1}/_{\mathrm{mol}}$$

Stoffbezogene Masse

Die *stoffbezogene Masse* M (auch *Atomgewicht* oder *Molekulargewicht*) gibt zu einem Stoff die Masse von 1 mol des Stoffes an.

$$M = \frac{m}{n}, \qquad [M] = 1\,{}^{\mathrm{g}}\!/_{\mathrm{mol}}$$

Die stoffbezogene Masse ist fast exakt durch die Anzahl der Kernteilchen (Protonen und Neutronen) in einem Partikel des Stoffs multipliziert mit $1\,{}^{\mathrm{g}}\!/_{\mathrm{mol}}$ gegeben.

Impuls und Kraft
kinetische Grundgleichung

Der *Impuls* $\vec{p}$ *eines Körpers* ist das Produkt seiner Masse mit seiner Geschwindigkeit:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \qquad [\vec{p}] = 1\,{}^{\mathrm{kg\,m}}/_{\mathrm{s}}$$

Der Impuls ist eine Erhaltungsgröße.

Die Änderungsrate des Impulses eines Körpers wird *Kraft* (mit der Einheit *Newton*) genannt:

$$\frac{\mathbf{d}\vec{p}}{\mathbf{d}t} = \frac{\mathbf{d}m\vec{v}}{\mathbf{d}t} = m\vec{a} = \vec{F}, \qquad [\vec{F}] = 1\,\mathrm{N} = 1\,{}^{\mathrm{kg\,m}}/_{\mathrm{s}^2}$$

Die Beziehung $m\vec{a} = \vec{F}$ („Kraft ist, was Massen zu beschleunigen vermag.“ – Isaac Newton) nennt man *kinetische Grundgleichung*.

Gravitationsfelder

Jeder Körper mit Masse m erzeugt ein *Gravitationsfeld* das andere Massen in der Entfernung r und Richtung $\vec{e}$ zu seinem Massenmittelpunkt hin beschleunigt:

$$\vec{a} = -G\frac{m}{r^2}\vec{e}$$

D.h. zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 im Abstand r üben auf den jeweils anderen eine anziehende Kraft aus:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Dabei ist G die Gravitationskonstante:

$$G \approx 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/kg^2} = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\,s^2}$$

Freier Fall
Gewichtskraft

Auf der Erde wird jeder ungebremste Körper vom Gravitationsfeld der Erde mit

$$g \approx 9{,}81\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$$

senkrecht nach unten (zum Massenmittelpunkt der Erde hin) beschleunigt.

D.h. ein Körper mit der Masse m übt eine Gewichtskraft von

$$F = mg$$

senkrecht nach unten (zum Massenmittelpunkt der Erde hin) aus.

Elektrische Ladung eines Körpers

Die SI-Einheit der Ladung ist das Coulomb:

$$[Q] = 1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{As}$$

Ladungen können positiv oder negativ sein. Die Ladungen der Teilkörper ergeben addiert die Ladung des Gesamtkörpers.

Ladungen treten immer als Vielfaches der Elementarladung e auf:

$$e \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

Ein Proton hat die Ladung e und ein Elektron $-e$. Die Ladung eines Körpers resultiert immer aus einem verhältnismäßig sehr kleinem Überschuss von Protonen (positive Ladung) oder Elektronen (negative Ladung). Die Ladung ist eine Erhaltungsgröße.

Das Coulomb-Gesetz

Wir betrachten Punktladungen im Vakuum.

Jede Ladung Q erzeugt ein *elektrisches Feld*, das in einem Raumpunkt mit Abstand r in der Richtung $\vec{e}$ die Feldstärke

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}, \qquad [\vec{E}] = \frac{[\vec{F}]}{[Q]} = {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{C}} = {}^{\mathrm{V}}/_{\mathrm{m}} = {}^{\mathrm{kg\,m}}/_{\mathrm{A\,s}^3}$$

aufweist. Dieses Feld übt auf eine Probeladung Q_{P} im Feld eine zur Feldstärke proportionale Kraft $\vec{F} = Q_{\mathrm{P}}\vec{E}$ aus.

Daraus folgt das *Coulomb-Gesetz*, welches besagt, dass zwei Ladungen Q_1 und Q_2 auf die jeweils andere eine Kraft

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad \varepsilon_0 \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}\, {}^{\mathrm{C}^2}/_{\mathrm{N\,m}^2}$$

ausüben, wobei die Kraft anziehend ist wenn die Ladungen unterschiedliches Vorzeichen haben und abstoßend wenn die Ladungen gleiches Vorzeichen haben.

Mechanische Arbeit, Energie

Mechanische Arbeit A mit der Einheit Joule

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}, \qquad [A] = 1\,\mathrm{N\,m} = 1\,\mathrm{J}$$

ist, wenn etwas die Strecke $\vec{s}$ bewegt wird und dabei die Kraft $\vec{F}$ aufgewendet wird.

Energie E (ebenfalls mit der Einheit Joule) ist allgemein die Fähigkeit Arbeit zu leisten. Die Energie ist eine Erhaltungsgröße.

D.h. um z.B. 1 J mechanische Arbeit zu verrichten, muss 1 J einer anderen Energieform (z.B. elektrische Energie) aufgewendet werden und ist nachher in einer anderen Energieform (z.B. kinetische Energie des bewegten Körpers oder Wärmeenergie durch Reibung) vorhanden.

Leistung

Leistung P (Einheit Watt) ist aufgewandte Energie (Arbeit) pro Zeiteinheit:

$$P = \frac{A}{t} = \frac{E}{t}, \qquad [P] = 1\,\mathrm{J/s} = 1\,\mathrm{W}$$

Man unterscheidet zwischen der mittleren Leistung $\bar{P} = A/t$ und der Momentanleistung $P(t) = \mathbf{d}A(t)/\mathbf{d}t$.

Für die elektrische Leistung gilt:

$$P = UI = I^2R = U^2/R, \qquad 1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{V} \cdot 1\,\mathrm{A}$$

Periodische Schwingungen

Einen zeitabhängigen Vorgang $u(t)$ mit

$$\exists\, T \in \mathbb{R}^+ \colon\ \forall\, t \in \mathbb{R} \colon\ u(t) = u(t+T),$$

d.h. mit einem Funktionsgraphen, der seinen Verlauf nach jeweils der Zeitdauer T wiederholt, nennt man *periodische Schwingung* mit der *Periodendauer* T. (Die Periodendauer ist das kleinste $T \in \mathbb{R}^+$ das diese Bedinung erfüllt.)

Die Wiederholungsrate f nennt man *Frequenz der Schwingung* (mit der Einheit Hertz):

$$f = 1/T, \qquad [f] = 1\,{}^1\!/\mathrm{s} = 1\,\mathrm{Hz}$$

Amplitude, Gleichanteil

Unter dem *Gleichanteil* $\bar{u}$ versteht man den Durchschnittswert der schwingenden Größe u einer periodischen Schwingung über eine Periodendauer T:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\, \mathbf{d}t$$

Unter der *Amplitude* (*Spitzenwert, Scheitelwert*) $\hat{u}$ versteht man die maximale Abweichung der schwingenden Größe u von ihrem *Gleichanteil* $\bar{u}$ über eine Periodendauer T:

$$\hat{u} = \max_{t \in [0,T)} |u(t) - \bar{u}|$$

Wenn Schwingungen untersucht werden, wird häufig nur der Fall $\bar{u} = 0$ (also ohne Gleichanteil) untersucht.

Sinusschwingungen, Kreisfrequenz

Aus verschiedenen Gründen werden häufig *Sinusschwingungen* (*sinusoidale Schwingungen, harmonische Schwingungen*) untersucht. Das sind Schwingungen der Form

$$u = \hat{u}\sin(\varphi_0 + \omega t).$$

Dabei bezeichnet φ_0 die Startphase in Radiant. Oft ist die Phasenlage unerheblich und es wird vereinfachend $\varphi_0 = 0$ angenommen.

Und $\omega = 2\pi f$ ist die *Kreisfrequenz* der Schwingung in ${}^{1}\!/_{\mathrm{s}} = {}^{\mathrm{rad}}\!/_{\mathrm{s}}$. Bildlich gesprochen ist die Kreisfrequenz die „Bahngeschwindigkeit am Einheitskreis“.

Durch die Verwendung der Kreisfrequenz statt der Frequenz ersparen wir uns ein allzu häufiges Anschreiben des Faktors 2π.

Wellen

Eine *Welle* ist die Ausbreitung einer Schwingung über die Kopplung schwingungsfähiger Systeme, sodass jeder von der Welle durchdrungene Raumpunkt eine Schwingung in der Zeit und gleichzeitig das von der Welle durchdrungene Medium eine „Schwingung im Raum" ausführt.

Dabei ändert sich bei der „Schwingung im Raum" die Phasenlage über die Zeit. Die Geschwindigkeit mit der sich die Phasenlagen durch das Medium bewegen nennt man *Phasengeschwindigkeit* c oder auch *Ausbreitungsgeschwindigkeit* der Welle. Wichtig: In der Regel bewegt sich nur die „Information der Phasenlage" mit dieser Geschwindigkeit und keine Materie!

D.h. an der Raumkoordinate x gilt zum Zeitpunkt t:

$$u = \hat{u} \sin\left(\frac{\omega}{c} x - \omega t\right)$$

(Die sog. Wellengleichung stellt einen Bezug zwischen den „Schwingungen in der Zeit" und der „Schwingung im Raum" über die 2. Ableitungen dieser Schwingungen her. Dabei tritt das Quadrat der Phasengeschwindigkeit als Faktor zwischen diesen 2. Ableitungen auf.)

Wellenlänge
Kreiswellenzahl

Gegeben ist eine Welle (mit x als Raumkoordinate):

$$u = \hat{u} \sin\left(\frac{\omega}{c} x - \omega t\right)$$

Der (kleinste) Abstand im Raum zwischen zwischen zwei gleichen Phasenlagen wird *Wellenlänge* λ genannt:

$$u(x,t) = u(x+\lambda, t) \implies \lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

Der Faktor ω/c wird als *Kreiswellenzahl* k abgekürzt:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \implies c = \frac{\omega}{k} = \lambda f = \frac{\lambda}{T}$$

Raumladungsdichte
Flächenladungsdichte

Ist die Ladung Q eines Körpers gleichmäßig über das Volumen V des Körpers verteilt, so spricht man von einem *gleichförmig geladenen Körper* mit der *Raumladungsdichte*

$$\varrho = \frac{Q}{V}, \qquad [\varrho] = 1\,{}^{\mathrm{C}}\!/\!_{\mathrm{m}^3}.$$

Bei einem gut leitfähigen Körper wird sich wegen der gegenseitigen Abstoßung gleicher Ladungen die Ladung Q jedoch auf der Oberfläche A des Körpers verteilen. Sodass die Raumladungsdichte an Bedeutung verliert und statt dessen die Ladungskonzentration sinnvollerweise in der (mittleren) Flächenladungsdichte σ gemessen wird:

$$\sigma = \frac{Q}{A}, \qquad [\sigma] = 1\,{}^{\mathrm{C}}\!/\!_{\mathrm{m}^2}$$

Der elektrische Strom

Bewegen sich elektrische Ladungen durch einen Leiter so spricht man vom *elektrischen Strom I*. Die Einheit der *Stromstärke* ist das *Ampere* (Coulomb pro Sekunde):

$$I = \frac{Q}{t}, \qquad [I] = 1\,{}^{\mathrm{C}}\!/\!_{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{A}$$

Der elektrische Strom ist keine geometrisch gerichtete Größe! Statt dessen bezieht sich das Vorzeichen des Stroms auf einen frei gewählten Bezugssinn. Es ist stets darauf zu achten, dass der Bezugssinn aus dem Schaltplan klar erkennbar ist, sodass die Vorzeichen der Ströme sinnvoll interpretiert werden können.

Notation für Momentanwerte
Newtonscher Fluxionspunkt

Die Momentanwerte der Spannung ($U(t)$) und des Stroms ($I(t)$) werden häufig einfach mit den Kleinbuchstaben u und i abgekürzt:

$$u := U(t) \qquad i := I(t)$$

Da man in der Elektrotechnik (und der Physik) sehr oft mit Ableitungen nach der Zeit arbeitet, hat sich eingebürgert für die Notation abkürzend den „Newtonschen Fluxionspunkt“ statt der Leibnitz-Schreibweise zu verwenden. Zum Beispiel:

$$I = C\frac{\mathbf{d}U}{\mathbf{d}t} \quad \Leftrightarrow \quad I = C\dot{U}, \qquad \vec{a} = \frac{\mathbf{d}^2\vec{s}}{\mathbf{d}t^2} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \ddot{\vec{s}}$$

Elektrische Spannung

Antwort

(Wir betrachten ein konservatives $\vec{E}$-Feld. D.h. eine Situation in der keine Induktionsvorgänge stattfinden und daher $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$ gilt.)

Ein $\vec{E}$-Feld übt eine Kraft $\vec{F} = \vec{E}Q$ auf eine im $\vec{E}$-Feld befindlichen Ladung Q aus (Coulomb-Kraft). Wird nun diese Ladung im $\vec{E}$-Feld bewegt, so wird nach $A = \vec{s} \cdot \vec{F}$ Arbeit geleistet. D.h. wir können sagen, dass sich damit die potentielle Energie der Lage der Ladung verändert. Die Stärke des $\vec{E}$-Feldes kann also in potentieller Energie pro Ladungseinheit und Streckeneinheit gemessen werden:

$$[\vec{E}] = 1\ \mathrm{J/Q\,m} = 1\ \mathrm{V/m} \qquad \text{mit } 1\ \mathrm{V} = 1\ \mathrm{J/C}$$

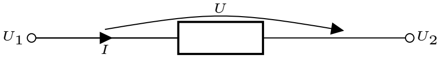
Vergleicht man (im elektrostatischen Fall) zwei Raumpunkte $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$, so kann man durch Integration einer beliebigen Strecke zwischen diesen Punkten die *Spannung* U (potentielle Energie pro Ladungseinheit, in der Einheit Volt) zwischen diesen Punkten bestimmen:

$$U = \int_{\mathcal{P}_1}^{\mathcal{P}_2} \vec{E}\,\mathbf{d}\vec{s}, \qquad [U] = 1\ \mathrm{V} = 1\ \mathrm{J/C}$$

Durch willkürliches Festlegen eines ausgezeichneten Raumpunktes mit $U = 0\,\mathrm{V}$ (*Ground, Masse*) kann jedem Raumpunkt ein *Potential* in Volt zugeordnet werden. Die Spannung zwischen zwei Punkten ist dann die Potentialdifferenz zwischen diesen zwei Punkten.

Bezugssinn bei Strom und Spannung

Bei der Analyse von elektrischen Netzen werden frei gewählte Bezugsinne für Ströme und Spannungen festgelegt. Diese werden (wenn nicht aus dem Kontext klar) in den Schaltplan als Pfeile eingezeichnet.



Bei einer positiven Spannung zeigt der Spannnungspfeil vom hohen Potential zum niedrigen Potential ($U = U1 - U2$). Bei einem Spannungpfeil um ein Bauteil (wie in dem Bespiel) spricht man vom *Spannungsabfall am Bauteil*.

Bei einem positiven Strom zeigt der Strompfeil in Richtung des Ladungsstroms. D.h. bei einem Ohm'schen Widerstand gilt $U = RI$ wenn Strom- und Spannungspfeil dieselbe Orientierung haben (und $U = -RI$ andernfalls).

Richtungssinn bei Strom und Spannung

Der Richtungssinn des Stroms gibt die Richtung der tatsächlichen Verschiebung einer positiven Ladung an. Wenn Richtungssinn und Bezugssinn übereinstimmen, so hat die Stromstärke ein positives Vorzeichen. Sind Richtungssinn und Bezugssinn verschieden, so hat die Stromstärke ein negatives Vorzeichen.

Analog dazu zur Spannung: Fällt die Spannung in Richtung des Bezugssinns ab, so sind Richtungssinn und Bezugssinn gleich und die Spannung ist positiv. Ist der Spannungsabfall entgegen des Bezugssinns so sind Richtungssinn und Bezugssinn verschieden und die Spannung ist negativ.

Gleich- und Wechselspannung
Gleich- und Wechselstrom

Bei einer zeitlich unveränderten Spannung $u = \text{const.}$ bzw. einem zeitlich unveränderten Strom $i = \text{const.}$ spricht man von einer *Gleichspannung* bzw. einem *Gleichstrom* (engl. DC).

Bei einer zeitlich veränderten Spannung $u = U(t)$ bzw. einem zeitlich veränderlichen Strom $i = I(t)$ spricht man von einer *Wechselspannung* bzw. einem *Wechselstrom* (engl. AC).

Bei einer Wechselspannung bzw. einem Wechselstrom, bei dem der Mittelwert nicht Null ist, nennt man diesen Mittelwert *Gleichanteil*.

Ohmscher Widerstand

In einem gewöhnlichen elektrischen Leiterabschnitt verhalten sich der Strom I durch und Spannung U am Leiter proportional zueinander:

$$U = R \cdot I$$

Die Proportionalitätskonstante R wird *ohmscher Widerstand* genannt und in der Einheit Ohm gemessen:

$$[R] = 1\,\mathrm{V}/\mathrm{A} = 1\,\Omega$$

Der Widerstandswert gibt quasi an, wie schlecht der Leiterabschnitt den Strom leitet, also wie viele Volt für ein Ampere notwendig sind.

Bauteile, die sich nur durch ihren konstanten Ohm'schen Widerstandswert auszeichnen werden einfach kurz *Widerstand* genannt.

Faraday-Konstante

Häufig ist aus der stoffbezogenen Masse M (in $^{\mathrm{g}}/_{\mathrm{mol}}$) und einer Anzahl von (z.B. freien) Elementarladungen pro Partikel N eine massebezogene Ladungsdichte ϱ zu errechnen. Das geschieht mit Hilfe der Avogadro-Konstante N_A und der Elementarladung e:

$$N_\mathrm{A} \approx 6{,}022 \cdot 10^{23}\ {}^{1}/_{\mathrm{mol}}$$
$$e \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$
$$\varrho = eN_\mathrm{A}N/M = FN/M$$

Der Faktor $F = eN_\mathrm{A}$ wird *Faraday-Konstante* genannt und beträgt:

$$F \approx 96\,485\ {}^{\mathrm{C}}/_{\mathrm{mol}}$$

Kreis: Umfang und Fläche

Ein Kreis ist durch seinen Radius r bzw. seinen Durchmesser $d = 2r$ gegeben.

Der Umfang U des Kreises ist:

$$U = \pi d = 2\pi r$$

Die Fläche A des Kreises ist:

$$A = \pi r^2$$

Hierbei ist π:

$$\pi \approx 3{,}14159\ldots$$

Kugel:
Oberfläche und Volumen

Eine Kugel ist durch ihren Radius r gegeben.

Die Oberfläche A der Kugel ist:

$$A = 4\pi r^2$$

Das Volumen V der Kugel ist:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Zusammenhang über Ableitung des Volumens nach r:

$$A = \frac{\mathbf{d}V}{\mathbf{d}r} = \frac{4\pi}{3}\frac{\mathbf{d}r^3}{\mathbf{d}r} = 4\pi r^2$$

Radiant, Steradiant
Candela

Radiant isr ein dimensionsloses Winkelmaß. Ein Winkel α hat so viele Radiant (rad) wie der vom Winkel eingeschlossene Kreisbogen des Einheitskreises lang ist. Es gilt also für den Vollkreis:

$$360^\circ \mathrel{\hat{=}} 2\pi\,\mathrm{rad}$$

Steradiant ist ein dimensionsloses Maß für Raumwinkel. Ein Raumwinkel Ω hat so viele Steradiant (sr) wie die Oberfläche der vom Raumwinkel eingeschlossenen Kugelkappe der Einheitskugel groß ist. Der volle Raumwinkel beträgt entsprechend $4\pi\,\mathrm{sr}$.

Die Einheit der Lichtstärke (Candela, cd) ist von der Dimension Leistung pro Raumwinkel:

$$1\,\mathrm{cd} = \frac{1}{683}\,{}^{\mathrm{W}}\!/_{\mathrm{sr}}$$

Wirkungsgrad

Wenn eine Maschine Arbeit verrichtet, also Energie von einer Form in eine andere Form umwandelt, so wird stets ein Teil der Energie in eine ungewünschte Form (meistens Abwärme) umgewandelt. Die Leistung die dabei „verloren" geht nennt man Verlustleistung P_{V}. Sie ist die Differenz aus zugeführter Leistung P_{zu} und planmäßig abgegebener Leistung P_{ab}:

$$P_{\mathrm{V}} = P_{\mathrm{zu}} - P_{\mathrm{ab}}$$

Der Quotient aus abgegebener und zugeführter Leistung heißt Wirkungsgrad η (meist in Prozent angegeben):

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{ab}}}{P_{\mathrm{zu}}} = 1 - \frac{P_{\mathrm{V}}}{P_{\mathrm{zu}}} \leq 1$$

Kohärentes Einheitensystem

Ein kohärentes Einheitensystem ist ein Einheitensystem in dem jede Einheit entweder eine Basiseinheit ist oder sich als Potenzprodukt der Basiseinheiten (ohne konstante Faktoren) anschreiben lässt.

Beispiele für kohärente Einheitensysteme sind das SI-Einheitensystem und das CGS-Einheitensystem.

Für Aufgabenstellungen aus der Elektrotechnik ist es oft sinnvoll von SI abweichend ein kohärentes Einheitensystem mit den Basiseinheiten Meter, Sekunde, Volt und Ampere zu verwenden (die Einheiten bleiben dieselben wie in SI – lediglich die Darstellungen als Potenzprodukte von Basiseinheiten ändern sich).

SI Basiseinheiten

SI-Basisgröße			SI-Basiseinheit	
Länge	l	L	der/das Meter	$1\,\mathrm{m}$
Zeit	t	T	die Sekunde	$1\,\mathrm{s}$
Masse	m	M	das Kilogramm	$1\,\mathrm{kg}$
Stromstärke	I	I	das Ampere	$1\,\mathrm{A}$
Temperatur	T	Φ	das Kelvin	$1\,\mathrm{K}$
Lichtstärke	I_v	J	das Candela	$1\,\mathrm{cd}$
Stoffmenge	n	N	das Mol	$1\,\mathrm{mol}$

(Bei den Basisgrößen steht in der Tabelle jeweils zuerst das gängige Formelzeichen und danach das gängige Dimensionssymbol.)

Abgeleitete Größen und Einheiten

Abgeleitete Größe		Abgeleitete Einheit	
Frequenz	f	Hertz	$1\,\mathrm{Hz} = {}^{1}/_{\mathrm{s}}$
Kraft	F	Newton	$1\,\mathrm{N} = 1\,{}^{\mathrm{kg \cdot m}}/_{\mathrm{s^2}}$
Druck	ρ	Pascal	$1\,\mathrm{Pa} = 1\,{}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{m^2}}$
Energie	E	Joule	$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m}$
Leistung	P	Watt	$1\,\mathrm{W} = 1\,{}^{\mathrm{J}}/_{\mathrm{s}}$
elektrische Spannung	U	Volt	$1\,\mathrm{V} = 1\,{}^{\mathrm{W}}/_{\mathrm{A}}$
elektrische Ladung	Q	Coulomb	$1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A\,s}$
elektrischer Widerstand	R	Ohm	$1\,\Omega = 1\,{}^{\mathrm{V}}/_{\mathrm{A}}$
elektrischer Leitwert	G	Siemens	$1\,\mathrm{S} = {}^{1}/_{\Omega}$
elektrische Kapazität	C	Farad	$1\,\mathrm{F} = 1\,{}^{\mathrm{C}}/_{\mathrm{V}}$
Induktivität	L	Henry	$1\,\mathrm{H} = 1\,{}^{\mathrm{V \cdot s}}/_{\mathrm{A}}$
magnetischer Fluss	Φ	Weber	$1\,\mathrm{Wb} = 1\,\mathrm{V\,s}$
magnetische Flussdichte	B	Tesla	$1\,\mathrm{T} = 1\,{}^{\mathrm{Wb}}/_{\mathrm{m^2}}$

SI Vorsätze

Vorsätze für Werte < 1		Vorsätze für Werte > 1	
Yocto	$10^{-24} \hat{=}$ y	Deka	$10^{1} \hat{=}$ da
Zepto	$10^{-21} \hat{=}$ z	Hekto	$10^{2} \hat{=}$ h
Atto	$10^{-18} \hat{=}$ a	Kilo	$10^{3} \hat{=}$ k
Femto	$10^{-15} \hat{=}$ f	Mega	$10^{6} \hat{=}$ M
Piko	$10^{-12} \hat{=}$ p	Giga	$10^{9} \hat{=}$ G
Nano	$10^{-9} \hat{=}$ n	Tera	$10^{12} \hat{=}$ T
Mikro	$10^{-6} \hat{=} \mu$	Peta	$10^{15} \hat{=}$ P
Milli	$10^{-3} \hat{=}$ m	Exa	$10^{18} \hat{=}$ E
Zenti	$10^{-2} \hat{=}$ c	Zetta	$10^{21} \hat{=}$ Z
Dezi	$10^{-1} \hat{=}$ d	Yotta	$10^{24} \hat{=}$ Y

Vakuumlichtgeschwindigkeit
elektrische Feldkonstante
magnetische Feldkonstante

Die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 beträgt:

$$c_0 = 299\,792\,458\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!_{\mathrm{s}} \approx 3 \cdot 10^8\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!_{\mathrm{s}}$$

Die elektrische Feldkonstante ε_0 beträgt:

$$\varepsilon_0 \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,{}^{\mathrm{A\,s}}\!/\!_{\mathrm{V\,m}}$$

Die magnetische Feldkonstante μ_0 beträgt:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,{}^{\mathrm{V\,s}}\!/\!_{\mathrm{A\,m}} \approx 12{,}566 \cdot 10^{-7}\,{}^{\mathrm{V\,s}}\!/\!_{\mathrm{A\,m}}$$

Durch gegenseitiges Einsetzen der Maxwell-Gleichungen und Umformen in die Form einer Wellengleichung kommt man zur Maxwell-Beziehung:

$$\varepsilon_0 \mu_0 c_0^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

Größengleichungen

Eine Größengleichung ist eine Gleichung in der alle Größen (Konstanten wie Variablen) durch Formelsymbole ausgedrückt werden. Eine Größengleichung ist unabhängig vom gewählten Einheitensystem gültig. Größengleichungen sind zum Beispiel:

$$U = R \cdot I, \qquad t = CR \cdot \ln\left(\frac{U_{\mathrm{Bias}}}{U_{\mathrm{Bias}} - U_{\mathrm{C}}}\right)$$

Achtung: Die Argumente für viele Funktionen wie z.B. der obenstehende Logarithmus oder Winkelfunktionen müssen dimensionslos sein und diese Funktionen liefern auch dimensionslose Werte.

Zahlenwertgleichung

Eine Zahlenwertgleichung ist eine Gleichung in die (dimensionslose) Zahlenwerte von Größen in vorgegebenen Einheiten eingesetzt werden müssen. Sie sind quasi „Kochrezepte“ zum Ausrechnen konkreter Zahlenwerte. Zahlenwertgleichungen sind zum Beispiel:

$$l_{\mathrm{cm}} = 2{,}54 \cdot l_{\mathrm{Zoll}}$$

$$f_{\mathrm{Hz}} = \frac{5033}{\sqrt{L_{\mathrm{mH}} \cdot C_{\mu\mathrm{F}}}}$$

konzentriertes Stromkreiselement

Unter einem *konzentrierten Stromkreiselement* (konzentrierten Bauteil, engl. *lumped component*) versteht man ein idealisiertes Bauteil ohne räumliche Ausdehnung, dessen Verhalten nur über die Ströme an und den Spannungen zwischen den Anschlüssen beschrieben wird.

Bei konzentrierten Stromkreiselementen gibt es keinen Zeitversatz zwischen einem Ereignis an einem Anschluss des Bauteils und den dazugehörigen Auswirkungen an den anderen Anschlüssen des Bauteils.

Ein Bauteil kann insbesondere dann als konzentriertes Stromkreiselement angenommen werden, wenn seine tatsächliche räumliche Ausdehnung viel kleiner ist als die Wellenlänge des am Bauteil anliegenden Signals.

1. Kirchhoff'sche Regel (Knotenregel)

Die Summe aller einem *Knoten* zufließenden Ströme ist gleich der Summe der aus dem Knoten abfließenden Ströme.

Wenn Bezugssinn und Richtungssinn eines Stroms verschieden sind so hat man es eben mit negativen zufließenden ($\hat{=}$ abfließenden) sowie negativen abfließenden ($\hat{=}$ zufließenden) Strömen zu tun. Es ist also für die Gültigkeit der Knotenregel nicht notwendig, den Bezugssinn der Ströme gleich ihrem Richtungssinn zu wählen.

Als *Knoten* wird in der Netzwerkanalyse der Zusammenschluss aller direkt durch Leiterbahnen o.Ä. verbundenen Bauteilanschlüsse verstanden. In der Netzwerkanalyse wird angenommen, dass diese direkten Verbindungen einen vernachlässigbar kleinen elektrischen Widerstand aufweisen und die räumliche Ausdehnung sowie genaue Geometrie der Verbindungen keine Rolle spielen. Ein Knoten wird als perfekte Äquipotentialfläche angenommen.

2. Kirchhoff'sche Regel (Maschenregel)

Die Summe der Spannungsabfälle in einer *Masche* ist immer gleich Null.

Hierbei sind die Vorzeichen von Spannungsabfällen deren Bezugssinne entgegen dem Umlaufsinn der Masche laufen, umzudrehen.

Als *Masche* wird in der Netzwerkanalyse ein Pfad entlang der Bauteile (*Zweige*) von einem Knoten zum nächsten bezeichnet, wenn der Startpunkt dieses Pfades auch der Endpunkt des Pfades ist. Bei Netzwerken mit planarer Darstellung nennt man eine Masche, die den Rand einer Zelle der planaren Darstellung entlang verläuft, ein *Fenster*.

Gültigkeitsbereich der Kirchhoff'schen Regeln

Die Kirchhoff'schen Regeln gelten nur unter folgenden Bedingungen:

- 1. Kirchhoff'sche Regel:
  Es gibt keine positiven oder negativen Überschussladungen in den Knoten oder den Bauteilen als Ganzes. D.h. eventuelle Verschiebeströme (zeitliche Änderungsrate des elektrischen Flusses) sind auf das Innere von Bauteilen beschränkt.
- 2. Kirchhoff'sche Regel:
  Es gibt keine zeitliche Änderung des Magnetfeldes (d.h. keine induktiven Vorgänge) außerhalb der Bauteile. D.h. das elektrische Feld ist außerhalb der Bauteile ein konservatives Feld.

Diese Annahmen bilden die Grundlage der Netzwerkanalyse. Wir können i.d.R. von der Gültigkeit dieser Annahmen ausgehen.

Netzwerkanalyse

In der Netzwerkanalyse werden elektrische Netze (bestehend aus Knoten und Zweigen) wie folgt untersucht:

1. Aufstellen einer **Stromgleichung** pro Knoten nach der Knotenregel. Wegwerfen einer dieser Gleichungen (beseitigen einer linearen Abhängigkeit).

2. Aufstellen einer **Spannungsgleichung** pro linear unabhängiger Masche (z.B. pro Fenster bei planaren Netzen) nach der Maschenregel.

3. Lösen dieses Gleichungssystems nach den unbekannten Größen.

Widerstand und Leitwert

Ein Widerstandsbauteil wird durch seinen Widerstandswert R (Resistanz) sowie das ohmsche Gesetz beschrieben:

$$U = RI \qquad [R] = 1\,\mathrm{V}/\mathrm{A} = 1\,\Omega$$

Der Kehrwert des Widerstands wird Leitwert G (Konduktanz) genannt und in Siemens gemessen:

$$G = \frac{1}{R} \qquad [G] = 1\,\mathrm{A}/\mathrm{V} = 1\,\mathrm{S}$$

Manche Schaltungen lassen sich einfacher mit Hilfe der Leitwerte der Bauteile als mit Hilfe ihrer Widerstandswerte beschreiben.

Serienschaltung von Widerständen

Zwei Widerstände in Serie werden wg. der Knotenregel immer vom selben Strom durchflossen. D.h. die U-I-Charakteristik der Serienschaltung von R_1 und R_2 ist

$$U = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2)I.$$

D.h. die Serienschaltung aus R_1 und R_2 zeigt das gleiche Verhalten wie ein einzelner Widerstand $R = R_1 + R_2$. Einen solchen Widerstand nennt man dann die *Ersatzschaltung* für die Serienschaltung aus R_1 und R_2.

Parallelschaltung von Widerständen

An zwei parallel geschalteten Leitwerten fällt wegen der Maschenregel die gleiche Spannung ab. D.h. die I-U-Charakteristik der Parallelschaltung von G_1 und G_2 ist

$$I = G_1 U + G_2 U = (G_1 + G_2) U.$$

D.h. es kann ein Ersatzleitwert $G = G_1 + G_2$ statt der Parallelschaltung verwendet werden und für die Widerstandswerte $R_1 = 1/G_1$ und $R_2 = 1/G_2$ gilt für den Ersatzwiderstand R:

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{G_1 + G_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} =: R_1 || R_2$$

Spannungsteiler

Wird an die Serienschaltung aus R_1 und R_2 die Spannung U angelegt, so fällt an R_1 die Spannung U_1 und an R_2 die Spannung U_2 proportional zu den Widerstandswerten ab:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}, \qquad U_1 = U\frac{R_1}{R_1 + R_2}, \qquad U_2 = U\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Beweis: R_1 und R_2 werden beide vom selben Strom I durchflossen. D.h. $U_1 = R_1 I$, $U_2 = R_2 I$ und $U = U_1 + U_2$. Durch Elimination von I und U gelangt man zur ersten oben stehenden Gleichung. Durch Elimination von I und U_2 zur zweiten und durch Elimination von I und U_1 zur dritten.

Stromteiler

Wird durch die Parallelschaltung aus G_1 und G_2 ein Strom geleitet, so teilt sich dieser Strom direkt proportional zu den Leitwerten auf:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1}{G_2}, \qquad I_1 = I\frac{G_1}{G_1 + G_2}, \qquad I_2 = I\frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

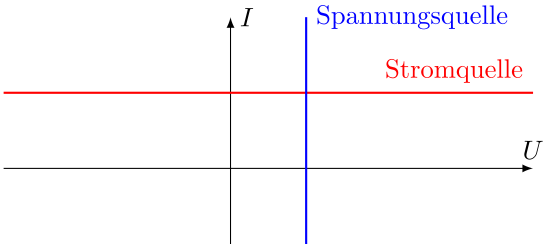
Für die entsprechenden Widerstandswerte $R_1 = 1/G_1$ und $R_2 = 1/G_2$ bedeutet das:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}, \qquad I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2}, \qquad I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Ideale Gleichstrom- und Gleichspannungsquellen

Eine ideale *Gleichstromquelle* liefert bei jeder Spannung den gleichen konstanten Strom.

Eine ideale *Gleichspannungsquelle* liefert bei jedem Strom die gleiche konstante Spannung.



Strom- und Spannungsquellen mit Innenwiderstand

Eine Spannungsquelle mit seriellem Innenwiderstand bzw. eine Stromquelle mit parallelem Innenwiderstand kann vollständig über zwei verschiedene Strom-Spannungs-Tupel charakterisiert werden.

Meistens geschieht diese Charakterisierung über den Kurzschlussstrom I_K bei $U = 0$ und der Leerlaufspannung U_0 bei $I = 0$.

Bei der Spannungsquelle mit Quellenspannung U_q und seriellem Innenwiderstand R_i:

$$U_\mathrm{q} = U_0 \qquad\qquad R_\mathrm{i} = U_0/I_\mathrm{K}$$

Bei der Stromquelle mit Quellenstrom I_q und parallelem Innenwiderstand R_i:

$$I_\mathrm{q} = I_\mathrm{K} \qquad\qquad R_\mathrm{i} = U_0/I_\mathrm{K}$$

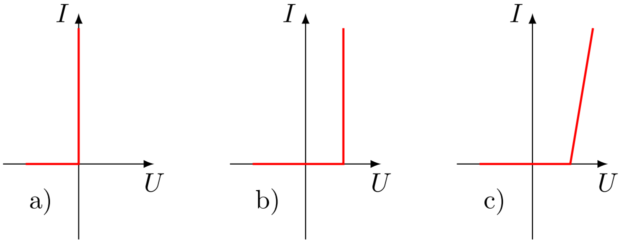
Von außen kann eine Spannungsquelle mit seriellem Innenwiderstand nicht von einer Stromquelle mit parallelem Innenwiderstand unterschieden werden.

Einfache Ersatzschaltungen für Dioden

a) „Einbahnstraße für den Strom“

b) wie a) aber mit *Schwellenspannung* (*Flussspannung*)

c) zusätzlich mit Serienwiderstand: $1/R = \Delta I/\Delta U$



Lösen einfacher Schaltungen mit Dioden

Einfache Schaltungen mit Dioden können wie folgt gelöst werden:

1. Treffen einer willkürlichen Annahme darüber, welche Dioden leiten.

2. Ersetzen der leitenden Dioden mit Spannungsquellen und ggf. Serienwiderständen. Ersetzen der sperrenden Dioden mit Unterbrechungen.

3. Lösen der Gleichungen zur resultierenden Schaltung.

4. Überprüfen der resultierenden Ströme durch die Dioden bzw. Spannungsabfälle an den Dioden. Wenn die ursprüngliche Annahme falsch war: Wiederholen mit neuer Annahme.

Erzeugerbezugssystem
Verbraucherbezugssystem
elektromotorische Kraft

Im *Erzeugerbezugssystem* zeigen die Bezugssinne des Stroms entgegen der Bezugssinne der Spannungsabfälle. Im Erzeugerbezugssystem gibt die Leistung $P = UI$ die erzeugte elektrische Leistung an. D.h. wenn $P > 0$ dann wird Energie nichtelektrisch aufgenommen und elektrisch abgegeben.

Im *Verbraucherbezugssystem* zeigen die Bezugssinne des Stroms in Richtung der Bezugssinne der Spannungsabfälle. Im Verbraucherbezugssystem gibt die Leistung $P = UI$ die verbrauchte elektrische Leistung an. D.h. wenn $P > 0$ dann wird Energie elektrisch aufgenommen und nicht-elektrisch abgegeben.

Die von Quellen erzeugte elektrische Spannung wird manchmal auch *elektromotorische Kraft* (EMK) genannt.

Leistung bei Wechselstrom- und Wechselspannungsquellen an Ohm'schen Lasten

Seien $u := U(t)$ bzw. $i := I(t)$ der Spannungs- bzw. Stromverlauf von Wechselstrom- bzw. -spannungsquellen mit der Periodendauer T. Dann ist die Leistung am Lastwiderstand R:

$$p = u \cdot i = u^2/R = i^2 R$$

Die durchschnittliche Leistung $\bar{p}$ bei einem sinusförmigen Verlauf $u = \hat{u}\sin(\omega t)$ ist somit:

$$\bar{p} = \frac{1}{RT}\int_0^T u^2 \,\mathbf{d}t = \frac{1}{RT}\int_0^T (\hat{u}\sin(\omega t))^2 \,\mathbf{d}t = \frac{\hat{u}^2}{2R}$$

Als *Effektivwert U_{eff} der Spannung u* wird jene Gleichspannung bezeichnet, die an einem Ohm'schen Widerstand die gleiche durchschnittliche Leistung umsetzt wie die Wechselspannung u. D.h. für einen sinusförmigen Verlauf gilt:

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 \,\mathbf{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (\hat{u}\sin(\omega t))^2 \,\mathbf{d}t} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

(Analog dazu: Effektivwert des Stroms.)

Grundstromkreis

Leistungsanpassung

Wirkungsgrad im Grundstromkreis

Ein sog. *Grundstromkreis* ist ein einfacher Stromkreis aus einer Quelle U_q bzw. I_q mit Innenwiderstand R_i und einem Lastwiderstand (Außenwiderstand) R_a.

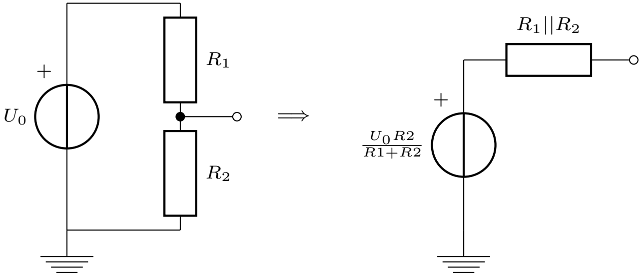
Bei einem Grundstromkreis spricht man von *Leistungsanpassung* wenn die am Lastwiderstand umgesetzte Leistung P_a maximal wird. Das ist bei $R_\mathrm{i} = R_\mathrm{a}$ der Fall. D.h. in diesem Fall fällt die halbe Quellenspannung (U_q) an R_a ab bzw. fließt der halbe Quellenstrom (I_q) durch R_a.

Der Wirkungsgrad $\eta = P_\mathrm{a}/P_\mathrm{q}$ der Quelle im Grundstromkreis steigt mit dem Wert des Lastwiderstands R_a:

$$\eta = \frac{R_\mathrm{a}}{R_\mathrm{a} + R_\mathrm{i}}, \qquad P_\mathrm{a} = U_\mathrm{q}^2 \frac{R_\mathrm{a}}{(R_\mathrm{a} + R_\mathrm{i})^2}, \qquad P_\mathrm{q} = U_\mathrm{q}^2 \frac{1}{R_\mathrm{a} + R_\mathrm{i}}$$

Spannungsteiler unter Last

Ein Spannungsteiler aus R_1 und R_2 besitzt folgende Ersatzschaltung:



D.h. der Spannungsteiler verhält sich wie eine Parallelschaltung von R_1 und R_2 gegen den unbelasteten Arbeitspunkt des Spannungsteilers. (Beweis: Umwandeln von U_0 und R_1 in eine Stromquelle mit Parallelwiderstand, Zusammenfassen der Widerstände, Rückumwandeln in Spannungsquelle.)

Ausnützen von Symetrieeigenschaften bei der Netzwerkanalyse

Viele auf den ersten Blick komplizierte Schaltung können durch Ausnützen von Symetrieeigenschaften der Schaltung leicht gelöst werden:

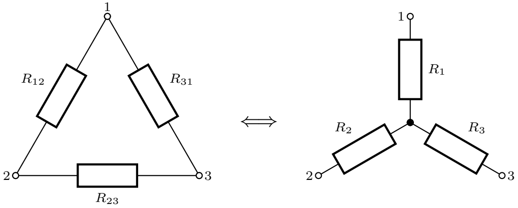
Unendliche Kettenschaltungen: Ersetzen der ganzen Kette ab dem zweiten Glied durch die zu dimensionierende Ersatzschaltung. So erhält man z.B. eine Gleichung der Form $R = f(R)$ die u.U. leicht gelöst werden kann.

Virtuelle Massen: Wenn zwei identische Pfade mit gleichem Bezugspotential vom gleichen Strom durchflossen werden, so ergeben sich Knotenpaare die auf gleichem Potential liegen müssen. Diese Knotenpaare können bel. durch passive Zweige verbunden oder einfach kurzgeschlossen werden bzw. passive Zweige oder Kurzschlüsse zwischen diesen Knoten können entfernt werden. So kann sich u.U. eine leichtere Schaltung ergeben.

Zusammenfassen von symetrischen Größen: Wenn aus Symetriegründen zwei Ströme oder Spannungen identisch sein müssen, ergeben sich oft einfachere Gleichungssysteme, wenn für diese Ströme oder Spannungen die gleichen Variablen verwendet werden und die durch diesen Schritt abhängig gewordene Gleichungen aus dem System gestrichen werden können.

Dreieck-Stern-Transformation

Die Dreieckschaltung und die Sternschaltung sind zueinander äquivialent:



$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}, \qquad R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Die Berechung von R_{23} und R_{31} geschieht aus Symmetriegründen analog zur Berechnung von R_{12}. Ebenso werden R_2 und R_3 analog zu R_1 berechnet.

Dimensionieren einer Ersatzspannungsquelle bzw. Ersatzstromquelle

Zum Dimensionieren der Ersatzspannungsquelle bzw. Ersatzstromquelle eines aktiven linearen Zweipols sind zwei der drei Parameter Innenwiderstand R_i, Leerlaufspannung U_0 und Kurzschlussstrom I_K zu bestimmen. Der dritte Parameter kann – wenn benötigt – über die Beziehung $U_0 = R_\mathrm{i} \cdot I_\mathrm{K}$ ermittelt werden.

Bestimmung von R_i: Ersetzen aller inneren Spannungsquellen durch Kurschlüsse ($U = 0\,\mathrm{V}$) und aller inneren Stromquellen durch Unterbrechungen ($I = 0\,\mathrm{A}$). Ermitteln des Ersatzwiderstandes. (Nur möglich bei Schaltungen mit konstanten – d.h. nicht gesteuerten – inneren Quellen.)

Bestimmung von U_0 bzw. I_K: Aufstellen von Maschen- und Knotengleichungen für offenen Ausgang (für U_0) bzw. kurzgeschlossenen Ausgang (für I_K). Lösen für Spannung (U_0) bzw. Strom (I_K) zwischen den Ausgangsklemmen.

Alternative Strategie (empfohlen z.B. bei Zweipolen mit inneren gesteuerten Quellen): Aufstellen einer Strom-Spannungs-Gleichung und Koeffizientenvergleich mit $U = U_0 - IR_\mathrm{i}$ (Ersatzspannungsquelle) bzw. $I = I_\mathrm{K} - U/R_\mathrm{i}$ (Ersatzstromquelle).

Methode der Ersatzquellen

Oft ist zu einer linearen Schaltung das Verhalten (Strom und/oder Spannung) entlang eines bestimmten Zweiges gesucht. Diese Probleme können häufig mit der *Methode der Ersatzquellen* gelöst werden:

1. Entfernen des zu untersuchenden Zweiges. Die Anschlussstellen des entfernten Zweiges werden zu den Anschlussklemmen unserer Ersatzquelle.

2. Umwandeln der verbleibenden Schaltung in eine Strom- oder Spannungsquelle mit Innenwiderstand.

3. Wiederanschließen des zu untersuchenden Zweiges an die Ersatzquelle.

Überlagerungssatz nach Helmholtz (Superpositionsprinzip)

Antwort

In einer linearen Schaltung kann jeder Strom und jede Spannung als Linearkombination der Auswirkungen der (ungesteuerten) Quellen ausgedrückt werden. Daraus folgt, dass in so einem Netzwerk jeder Strom und jede Spannung berechnet werden kann indem die Auswirkung jeder Quelle auf die untersuchte Größe getrennt analysiert wird. Man geht dazu wie folgt vor:

1. Für jede (ungesteuerte) Quelle wird ein Netzwerk gebildet in dem alle anderen (ungesteuerten) Quellen den Wert Null zugeordnet bekommen (d.h. Spannungsquellen werden durch Kurzschlüsse und Stromquellen durch Unterbrechungen ersetzt).

2. Die gesuchte Größe wird für jedes der in **1.** erzeugten Netze getrennt berechnet.

3. Die gesuchte Größe ist die Summe der in **2.** ermittelten Werte.

Es ist natürlich auch möglich, die Quellen in Gruppen einzuteilen und die oben stehenden Schritte für jede Gruppe von Quellen anstatt für jede Quelle durchzuführen.

Veranschaulichungen von Vektorfeldern

Vektorpfeile: Das Feld wird durch ein Raster von Pfeilen visualisiert deren Länge und Ausrichtung dem lokalen Wert des Feldes entsprechen. Vorteil: Nahe an der numerischen Darstellung als $\vec{f}(x, y, z)$. Nachteil: Quellen und Senken sowie ob das Feld konservativ (wirbelfrei) ist ist nur schwer zu erkennen.

Feldlinien: Das Feld wird durch Feldlinien veranschaulicht. Eine Feldlinie beginnt stets in einer Quelle und endet stets in einer Senke. Die Ausrichtung der Feldlinien entspricht der lokalen Orientierung des Feldes und die Dichte der Feldlinien der lokalen Feldstärke. Wirbel werden durch Feldlinien die Schleifen bilden und daher weder Anfang noch Ende haben visualisiert.

Feldröhren: Ähnlich den Feldlinien wird der Raum in Feldröhren zerlegt. Der Querschnitt A jeder Feldröhre wird an jeder Stelle von der gleichen Summe $\iint_A \vec{f} \cdot \mathbf{d}\vec{n}$ durchsetzt. D.h. ein besonders kleiner Feldröhrenquerschnitt steht für eine besonders große Feldstärke. Im Modell der Feldröhren kann man sich leicht vorstellen, wie eine Flüssigkeit durch die Feldröhren fließt. Bei gleicher Flüssigkeitsmenge pro Zeiteinheit für alle Röhren entspricht dann die Strömungsrichtung und -geschwindigkeit in jedem Raumpunkt dem lokalen Wert des Feldes.

Konservative Felder und Potentiale

Antwort

Ein *konservatives Feld* ist ein Feld, in dem keine geschlossenen Feldlinien (Schleifen, Wirbel) auftreten. D.h. in einem konservativen Feld hat jede Feldlinie einen Anfang (Quelle) und ein Ende (Senke). Manchmal jedoch muss Quelle und/oder Senke idealisierend als unendlich weit entfernt angenommen werden (z.B. $\vec{E}$-Feld einer einzelnen positiven Punktladung: Quelle ist die Punktladung und Senke die Innenfläche einer gedachten Hohlkugel mit unendlich großem Radius und der Punktladung im Zentrum).

Die wesentliche Eigenschaft eines konservativen Feldes ist, dass in einem konservativen Feld jedes geschlossene Wegintegral $\oint \vec{E} \cdot \mathbf{d}\vec{s} = 0$ ist.

In einem konservativen Feld (wie z.B. dem $\vec{E}$-Feld im elektrostatischen Fall) liefert jedes Wegintegral vom Punkt $\mathcal{P}_1$ zum Punkt $\mathcal{P}_2$, unabhängig davon welcher Weg von $\mathcal{P}_1$ nach $\mathcal{P}_2$ gewählt wurde, den gleichen Wert.

Damit kann durch willkürliche Wahl von $\varphi(\mathcal{P}_0) = 0$ jedem Raumpunkt $\mathcal{P}$ eindeutig das *Potential* $\varphi(\mathcal{P}) = -\int_{P_0}^{P} \vec{E} \cdot \mathbf{d}\vec{s}$ zugewiesen werden. (Das negative Vorzeichen ist notwendig, da das $\vec{E}$-Feld per Konvention vom hohen Potential zum niedrigen zeigt.)

Das Potential im $\vec{E}$-Feld ist das *elektrische Potential* und die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten im $\vec{E}$-Feld ist die *elektrische Spannung*.

Das *elektrische Potential* entspricht der potentiellen Energie der Lage einer Ladung im $\vec{E}$-Feld.

Potentialflächen

Werden in einem konservativen Feld Punkte gleichen Potentials zu Flächen verbunden, ergeben sich abgeschlossene (oder den Raum in Halbräume teilende) Flächen – die sogenannten *Potentialflächen* (*Äquipotentialflächen*).

Die Oberflächen der Potentialflächen stehen stets normal zu den Feldlinien bzw. den Feldvektoren des sie definierenden Feldes.

Oft ist es zur besseren Veranschaulichung sinnvoll, zu einem Aufbau Potentialflächen zu äquidistant gewählten Potentialen zu konstruieren.

Ein nicht stromführender Leiter ist immer feldfrei. Daher ist jede leitende, nicht stromführende Oberfläche eine Potentialfläche.

Homogene und inhomogene Felder und Charakterisierung über Potentialflächen

Als *homogen* wird ein Feld bezeichnet, das in jedem Raumpunkt den gleichen Wert aufweist.

In einem homogenen Feld sind die Potentialflächen zu äquidistant gewählten Potentialen parallele, räumlich äquidistante Ebenen.

Im Inneren eines Plattenkondensators mit ausreichend großen Platten und ausreichend kleinem Plattenabstand herrscht ein annähernd homogenes $\vec{E}$-Feld.

Das Gegenteil des homogenen Feldes ist das inhomogene Feld.

Insbesondere in der Umgebung scharfer Kanten und Spitzen leitender Oberflächen kommt es zu einer Stauchung der Potentialflächen und somit zu besonders großen Feldstärken.

Punktprodukt
Normalprojektion

Sei $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{a} := \begin{pmatrix} a_\mathrm{x} \\ a_\mathrm{y} \\ a_\mathrm{z} \end{pmatrix}$, $\vec{b} := \begin{pmatrix} b_\mathrm{x} \\ b_\mathrm{y} \\ b_\mathrm{z} \end{pmatrix}$ und $\gamma := \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Dann ist das *Punktprodukt* (*innere Produkt*, *skalare Produkt*) definiert als:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \; := \; a_\mathrm{x} b_\mathrm{x} + a_\mathrm{y} b_\mathrm{y} + a_\mathrm{z} b_\mathrm{z} \; = \; \cos(\gamma)|a||b|$$

Die Normalprojektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ ist damit $\vec{a} \cdot \vec{b}/|b|$, wobei der Faktor $1/|b|$ wegfällt wenn der Vektor $\vec{b}$ bereits auf die Länge 1 normiert ist.

Bei Oberflächenintegralen wird die mit dem Flächeninhalt des Flächenstücks gewichtete Komponente eines Vektorfeldes die durch ein Flächenstück durchtritt errechnet, indem das Punktprodukt aus Vektorfeld und Normalvektor des Flächenstücks errechnet wird, wobei die Länge des Normalvektors auf den Flächeninhalt des Flächenstücks normiert wird. z.B.:

$$Q = \oiint_A \vec{D} \cdot \mathbf{d}\vec{n}$$

Fluss und Flussdichte

Der *Fluss* ist allgemein das Punktprodukt zwischen Vektorfeld und Fläche. Z.B. ist der Gesamtfluss Q, der von einer konzentrierten Ladung ausgeht, gleich dem Flächenintegral im $\vec{D}$-Feld über eine die Ladung einschließende geschlossene Oberfläche: $Q = \oiint_A \vec{D} \cdot \mathbf{d}\vec{n}$.

In konservativen Feldern geht jeder Fluss von einer Quelle aus und endet in einer Senke.

Die *Flussdichte* ist damit das betrachtete Vektorfeld. Während die Flussdichte eine Funktion des Raumes ist, ist der Fluss selbst keine geometrische Größe. Erst die Flussdichte verrät uns, wie sich der Fluss auf den Raum aufteilt.

Elektrischer Fluss und elektrische Flussdichte

Elektrische Felder werden (im elektrostatischen Fall) von elektrischen Ladungen Q verursacht. Da die Größe des von einer Ladung ausgehenden Flusses proportional zur Größe der Ladung ist, wird der Fluss selbst ebenfalls mit Q bezeichnet.

D.h. ein elektrischer Fluss Q hat als Quelle eine Ladung Q und als Senke eine Ladung $-Q$.

Die elektrische Flussdichte hat das Formelzeichen $\vec{D}$ und die elektrische Ladungsdichte das Formelzeichen ϱ. Die Beziehung zwischen elektrischen Ladungen und elektrischen Flüssen (bzw. der Ladungsdichte und Flussdichte) wird über den *Divergenz-Operator* ausgedrückt:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho$$

Satz vom elektrischen Hüllenfluß (Gauß'scher Integralsatz)

Die elektrische Ladungsdichte ϱ ist das Quellenfeld der elektrischen Flussdichte $\vec{D}$:

$$\varrho = \operatorname{div} \vec{D}$$

Nach dem Gauß'schen Integralsatz folgt daher für jedes Volumen V, seine geschlossene Hülle ∂V und die darin eingeschlossene Ladung $Q(V)$:

$$\iiint\limits_{V} \varrho \, \mathbf{d}V = \oiint\limits_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathbf{d}\vec{n} = Q(V) =: \text{Hüllenfluß}$$

D.h. ist ein Hüllenfluss für ein Volumen 0 so befinden sich in diesem Volumen gleich viele positive wie negative Ladungen.

Elektrische Feldstärke
Permittivität

Ein elektrischer Fluss ruft in dem von ihm durchdrungenen Raum ein elektrisches $\vec{E}$-Feld hervor, das in der Stärke proportional zur elektrischen Flussdichte $\vec{D}$ ist und per Konvention (wie auch das $\vec{D}$-Feld) in Richtung der negativen Ladungen zeigt. (Das ist gleichzeitig jene Richtung in die eine positive Probeladung im $\vec{E}$-Feld beschleunigt werden würde.)

Die mediumsabhängige Proportionalitätskonstante, die (im einfachen linearen, isotropen, zeitlich und räumlich homogenen Fall) $\vec{D}$-Feld und $\vec{E}$-Feld miteinander verknüpft wird Permittivität ε genannt:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

Dabei ist ε_0 die elektrische Feldkonstante und ε_r die *relative Permittivität* (*Permittivitätszahl*) des Mediums. Vakuum hat die Permittivitätszahl $\varepsilon_r = 1$ und andere Medien immer $\varepsilon_r > 1$.

Das $\vec{E}$-Feld einer Punktladung

Bei einer Punktladung ist $\operatorname{div}\vec{D} = \varrho \neq 0$ nur am Ort der Punktladung gegeben. D.h. alle Feldröhren müssen in der Punktladung beginnen und erstrecken sich von der Puntladung aus radial und gleichmäßig mit gleichem Raumwinkel Ω pro Feldröhre in den Raum.

D.h. im Abstand r von der Punktladung hat jede Feldröhre den Querschnitt $\Delta A = r^2\Omega$. Der elektrische Gesamtfluss Q teilt sich mit $Q\Omega/(4\pi)$ pro Feldröhre auf die Feldröhren auf. D.h. Es gilt für Flussdichte und Feldstärke im Abstand r:

$$|\vec{D}| = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon} \quad \text{(wegen } \vec{D} = \varepsilon\vec{E}\text{)}$$

Das $\vec{E}$-Feld im Plattenkondensator
Kapazität des Plattenkondensators

Das Feld in einem Plattenkondensator mit hinreichend großen Platten und hinreichend kleinem Plattenabstand kann als homogen angenommen werden. Wenn sich auf der einen Platte die Ladung Q und auf der anderen die entsprechende Gegenladung $-Q$ befindet, so beträgt der elektrische Gesamtfluss Q und teilt sich gleichmäßig auf den Plattenquerschnitt A auf:

$$|\vec{D}| = \frac{Q}{A} \quad \Rightarrow \quad |\vec{E}| = \frac{Q}{\varepsilon A} \quad (\text{wegen } \vec{D} = \varepsilon \vec{E})$$

Die Spannung am Kondensator beträgt somit abhängig vom Plattenabstand l:

$$U = l\vec{E} = Q\frac{l}{\varepsilon A} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\varepsilon A}{l}U = CU$$

Die Proportionalitätskonstante $C = \varepsilon A/l$ mit $[C] = 1\,\text{Farad} = 1\,\text{F} = 1\,{}^{\text{C}}/_{\text{V}}$ wird *Kapazität* des Kondensators genannt. Es gilt generell für die Kapazität an einem Kondensator:

$$Q = CU$$

Das $\vec{E}$-Feld im Kugelkondensator
Kapazität des Kugelkondensators

In einem Kugelkondensator sind die Äqipotentialflächen konzentrische Kugelflächen. Potential φ und Feldstärke $\vec{E}$ im Abstand r vom Mittelpunkt betragen (wie bei einer Punktladung)

$$\varphi = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{4\pi r}, \qquad \vec{E} = -\frac{\mathbf{d}\varphi}{\mathbf{d}r}\vec{e}_r = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{4\pi r^2}\vec{e}_r.$$

Für einen Kugelkondensator mit Innenradius r_1 und Außenradius r_2 ergibt sich damit für die Kapazität:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\varphi(r_1) - \varphi(r_2)} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} =$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon}{\cancel{Q}} \cdot \frac{\cancel{Q}}{\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}} = \varepsilon \frac{4\pi r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Influenz

Wird ein zunächst ungeladener elektrischer Leiter einem $\vec{E}$-Feld ausgesetzt, so wird es wegen der Kraftwirkung des $\vec{E}$-Feldes auf die Ladungsträger im Leiter zu einer Ladungsverschiebung im Leiter kommen. Diese Ladungsverschiebung dauert an, bis das durch die Ladungsverschiebung erzeugte $\vec{E}$-Feld im Leiter sich mit dem von außen angelegten $\vec{E}$-Feld in der Form überlagert, sodass die beiden Felder sich im Leiterinneren gegenseitig aufheben.

Würde man dann an diesem Punkt den Leiter normal zu dem von außen angelegten Feld in zwei Teile schneiden so erhielte man ein positiv und ein negativ geladenes Leiterstück.

Diesen Vorgang der Ladungsverschiebung/Ladungstrennung in Leitern durch das äußere $\vec{E}$-Feld nennt man *Influenz*.

Dielektrika

Ein den elektrischen Strom nicht leitendes Medium wird allgemein *Dielektrikum* genannt.

Im Mikroskopischen wird generell mit $\varepsilon = \varepsilon_0$ gearbeitet. Die von 1 abweichenden Permittivitätszahlen verschiedenster Medien lassen sich durch Influenz der (z.T. stark eingeschränkt) beweglichen Ladungen im Medium erklären.

Zur einfachen makroskopischen Beschreibung einer kontinuierlichen Materie werden dann diese Effekte in einer Permittivitätszahl $\varepsilon_r > 1$ zusammengefasst: $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

Im Kondensator haben die mit $\varepsilon_r > 1$ verbundenen Influenzerscheinungen den selben Effekt wie eine Verkleinerung des Plattenabstandes. Daher ist für Kondensatoren mit besonders großer Kapazität ein Dielektrikum mit besonders großem ε_r wünschenswert.

Isotropheit, Linearität, Homogenität und Frequenzunabhängigkeit dielektrischer Eigenschaften

Antwort

Damit ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ ein Medium hinreichend bezüglich seiner dielektrischen Eigenschaften beschreiben kann muss eine Reihe von Bedingungen erfüllt sein:

Isotropheit: Ein Medium das in allen Raumrichtungen dieselben dielektrischen Eigenschaften aufweist heißt *isotrop*. Insbesondere Materialien mit Gitterstrukturen wie z.B. Kristalle verhalten sich i.d.R. nicht so und sind daher *anisotrop*.

Linearität: Ein Medium, bei dem eine direkte Proportionalität zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$ existiert, heißt *linear*. Insbesondere bei Materialen mit hoher Permittivität gilt das nur in erster Näherung für kleine Feldstärken. Für große Feldstärken müssen dann komplexere *nicht lineare* Modelle verwendet werden.

Homogenität: Materialien, die in jedem Raumpunkt dieselben Eigenschaften aufweisen heißen *homogen*.

Frequenzunabhängigkeit: Materialien, die bei Wechselfeldern bei jeder Frequenz dieselben Eigenschaften aufweisen, sind *frequenzunabhängig*. Materialien mit hoher Permittivität haben oft eine große *Frequenzabhängigkeit*.

D.h. ggf. sind bei einer Angabe von ε bzw. ε_r eines Mediums auch die Rahmenbedingungen, unter denen dieses ε bzw. ε_r das Medium sinnvoll beschreibt, anzugeben und bei der Verwendung dieser Zahlen entsprechend zu beachten.

Kapazität des Plattenkondensators bzw. des Kugelkondensators

Für den Plattenkondensator gilt:

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon \frac{A}{l}$$

Für den Kugelkondensator gilt:

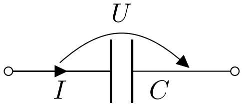
$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon \frac{4\pi r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Mit $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, wobei ε_0 die elektrische Feldkonstante und ε_r die Permittivitätszahl des Mediums zwischen den Platten bzw. den Kugeloberflächen ist.

$$\varepsilon_0 \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,{}^{\mathrm{A\,s}}\!/\!{}_{\mathrm{V\,m}} = 8{,}854\,{}^{\mathrm{pF \cdot m}}\!/\!{}_{\mathrm{m^2}}$$

Der Kondensator als Bauteil

Ein Kondensator ist ein Bauteil mit zwei Anschlüssen dessen wesentliche Eigenschaft seine Kapazität ist.

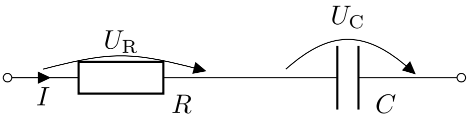


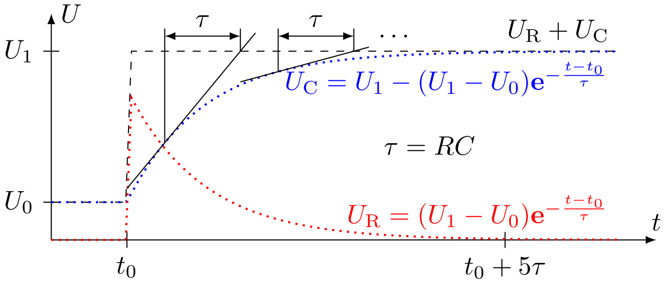
Für einen (idealen) Kondensator und die durch ihn geflossene Ladungsmenge $Q = \int I$ gilt:

$$Q = CU \quad \iff \quad I = C\dot{U}$$

Mit *Ladung des Kondensators* ist stets die Ladungsverschiebung zwischen den Kondensatorplatten im Kondensatorinneren gemeint. Als ganzes ist der Kondensator nach außen hin natürlich elektrisch ungeladen.

Sprungantwort einer RC-Serienschaltung


U_R
U_C
I
R
C


U
U_1
U_0
τ
τ
$\dots$
$U_\mathrm{R} + U_\mathrm{C}$
$U_\mathrm{C} = U_1 - (U_1 - U_0)\mathbf{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$
$\tau = RC$
$U_\mathrm{R} = (U_1 - U_0)\mathbf{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$
t
t_0
$t_0 + 5\tau$

Eigenschaften einer RC-Serienschaltung

Die Zeit $\tau = RC$ nennt man *Zeitkonstante* der RC-Serienschaltung.

Die Frequenz $f_\mathrm{g} = \frac{1}{\tau}$ bzw. die Kreisfrequenz $\omega_\mathrm{g} = \frac{2\pi}{\tau}$ nennt man *Grenzfrequenz* der RC-Serienschaltung.

Bei Spannungsverläufen mit Frequenzen $f >> f_\mathrm{g}$ fällt fast die ganze Spannung am Widerstand ab (Hochpass).

Bei Spannungsverläufen mit Frequenzen $f << f_\mathrm{g}$ fällt fast die ganze Spannung am Kondensator ab (Tiefpass).

D.h. für besonders hohe Frequenzen verhält sich der Kondensator wie ein Kurzschluss und für besonders niedrige Frequenzen verhält sich der Kondensator wie eine Unterbrechung.

Berechnung der Zeitkonstanten einer RC-Kombination

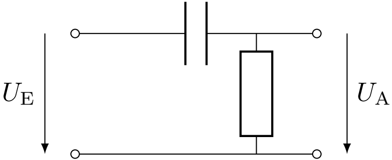
1. Zusammenfassen der Kapazitäten zu einer einzelnen Ersatzkapazität C (z.B. durch Identifizieren von Serien- und Parallelschaltungen).

ACHTUNG: Falls sich die Kapazitäten nicht zu einer einzelnen Ersatzkapazität zusammenfassen lassen, so handelt es sich um einen Filter höherer Ordnung, der nicht einfach mit einer Zeitkonstante charakterisiert werden kann.

2. Herausnehmen der Ersatzkapazität aus der Schaltung und bestimmen des Ersatzwiderstandes R der restlichen Schaltung aus der Sicht der Ersatzkapazität. Dabei werden Stromquellen durch Unterbrechungen und Spannungsquellen durch Kurzschlüsse ersetzt.

3. Berechnen der Zeitkonstante: $\tau = R \cdot C$

RC Hochpassfilter

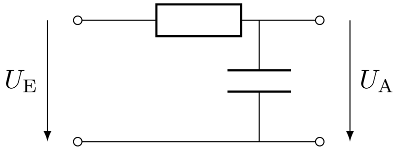


Durchlässig für hohe Frequenzen. Undurchlässig für niedrige Frequenzen.

Weit unterhalb der Grenzfrequenz Dämpfung von 6 dB pro Oktave, d.h. die Ausgangsamplitude halbiert sich pro Halbierung der Frequenz.

Hinreichend langsame Signale werden vom Hochpassfilter differenziert.

RC Tiefpassfilter



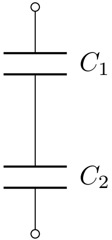
Durchlässig für niedrige Frequenzen. Undurchlässig für hohe Frequenzen.

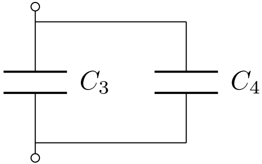
Weit oberhalb der Grenzfrequenz Dämpfung von 6 dB pro Oktave, d.h. die Ausgangsamplitude halbiert sich pro Verdoppelung der Frequenz.

Hinreichend schnelle Signale werden vom Tiefpassfilter integriert.

Serienschaltung und Parallelschaltung von Kondensatoren

$$C_{\mathrm{S}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = C_1 || C_2$$





$$C_{\mathrm{P}} = C_3 + C_4$$

Teilkapazitäten

Allgemein besteht ein Kondensator mit n Anschlüssen mit den Ladungen $Q_1, \ldots, Q_n$ aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Teilkapazitäten $C_{ij} = C_{ji}$ mit $i, j \in [1; n]$ und $i \neq j$.

Wenn die Voraussetzungen zum Kirchhoff'schen Stromgesetz erfüllt sind, kann zu jedem Zeitpunkt $Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n = 0$ angenommen werden.

Wir bezeichnen den elektrischen Fluss zwischen den Anschlüssen i und j als $Q_{ij} = -Q_{ji}$. D.h. für die Ladung an dem Anschluss i, dass $Q_i = \sum_{j=1}^{n} Q_{ij}$ mit $Q_{ii} = 0$ und für die Spannung zwischen den Anschlüssen i und j, dass $Q_{ij} = C_{ij} U_{ij}$.

Damit kommt man z.B. für einen Kondensator mit 4 Anschlüssen zum folgenden Gleichungssystem (in dem wg. $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$ eine Gleichung von den anderen abhängig sein muss).

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= +Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} = +C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13} + C_{14}U_{14} \\
Q_2 &= -Q_{12} + Q_{23} + Q_{24} = -C_{12}U_{12} + C_{23}U_{23} + C_{24}U_{24} \\
Q_3 &= -Q_{13} - Q_{23} + Q_{34} = -C_{13}U_{13} - C_{23}U_{23} + C_{34}U_{34} \\
Q_4 &= -Q_{14} - Q_{24} - Q_{34} = -C_{14}U_{14} - C_{24}U_{24} - C_{34}U_{34}
\end{aligned}
$$

Extremwerte des Potentials und der elekt. Feldstärke außerhalb der Leiter

In einem leeren, ladungsfreien Feldgebiet liegen die Extremwerte (Minima und Maxima) des elektrostatischen Potentials immer an den Rändern.

In einem leeren, ladungsfreien Feldgebiet liegen die Maxima des Betrags der elektrischen Feldstärke (und damit auch der elektrischen Flußdichte) im statischen Fall immer an den Rändern.

Beweis: In beiden Fällen führt die Annahme des Gegenteils zu Widersprüchen beim Versuch ein entsprechendes Bild von Flußröhren und Potentialflächen zu erstellen.

Eigenschaften von Feldlinien

Die Tangente an eine Feldlinie ist immer gleich orientiert wie der Feldvektor an der Stelle des Feldes.

In 2-dimensionalen Darstellungen (Schnitte des Raums mit der Zeichenebene) können die Ränder von Flussröhren als Feldlinien interpretiert werden (und umgekehrt).

Der Abstand zwischen den Feldlinien ist indirekt proportional zur Feldstärke.

Die Feldlinien stehen immer senkrecht auf die Potentialflächen.

Feldlinien (wie Flussröhren) beginnen bei Quellen und enden bei Senken des Feldes.

Das elektrische Feld im Inneren stromfreier Leiter

Das Innere stromfreier Leiter ist immer feldfrei. Die Oberfläche des stromfreien Leiters ist eine Potentialfläche.

Alle Überschussladungen in einem stromfreien Leiter lagern sich an der Oberfläche des Leiters ab. Sie werden durch die gegenseitige Abstoßung gleichnamiger Ladungen quasi an die Oberfläche verdrängt.

Die Innenfläche eines Hohlraumes in einem stromfreien Leiter ist ladungsfrei. Das gilt z.B. auch für die Innenseite eines Bechers.

Ein Hohlraum in einem stromfreien Leiter ist feldfrei, wenn sich keine Ladungen im Inneren des Hohlraumes befinden (Faraday-Käfig).

Das elektrische Feld in der Umgebung stromfreier Leiter

Die Oberfläche eines stromfreien Leiters bildet eine Potentialfläche.

Die $\vec{E}$-Feldlinien stehen senkrecht auf die Potentialflächen und damit auf die Oberfläche des stromfreien Leiters.

Die Oberfläche eines insgesamt ungeladenen Leiters in einem $\vec{E}$-Feld ist Teil einer Potentialfläche, die sich auch durch den Raum um den Leiter rechtwinkelig zu den $\vec{E}$-Feldlinien fortsetzt. D.h. diese Potentialfläche ist nicht auf die Oberfläche des stromfreien Leiters beschränkt.

Potentialflächen und leitende Oberflächen

Jede stromfreie leitende Oberfläche bildet eine Potentialfläche.

Wenn entlang einer Potentialfläche eine ungeladene stromfreie leitende Oberfläche (z.B. Metallfolie) eingezogen wird, so ändert sich dadurch an der Feldkonfiguration nichts.

Wenn der Innenraum einer Potentialfläche durch ein beliebiges stromfreies Objekt mit leitender Oberfläche und der selben Überschussladung wie der ursprüngliche Innenraum der Potentialfläche ersetzt wird, so ändert sich dadurch an der äußeren Feldkonfiguration nichts.

Ebenso kann der Außenraum einer Potentialfläche mit einem Objekt mit leitender Oberfläche und gleicher Überschussladung wie der ursprüngliche Raum gefüllt werden ohne dass sich dadurch die Feldkonfiguration im Inneren der Potentialfläche ändert.

Funktionsprinzip des Faraday-Käfigs

Ein Raum kann vor **äußeren** $\vec{E}$-Feldern abgeschirmt werden, indem er mit einer leitenden Oberfläche umgeben wird. Ein äußeres Feld wird dann durch Influenz innerhalb dieser Oberfläche ausgeglichen und der Innenraum des Faraday-Käfigs bleibt feldfrei.

In den meisten Fällen reicht auch ein nicht zu weitmaschiges Drahtnetz als leitende Ummantelung aus.

ACHTUNG: Die Abschirmung funktioniert nicht von innen nach außen! Eine Überschussladung im Inneren des Käfigs verursacht sehr wohl ein äußeres $\vec{E}$-Feld!

Funktionsprinzip des Van de Graaff – Generators

Der Innenraum eines Metallbechers ist immer ladungsfrei, weil die Ladungungen durch ihre gegenseitige Abstoßung an die Außenseite des Bechers gedrängt werden.

D.h. wenn (z.B. mit einem Metallblättchen) Ladungen auf den Becher übertragen werden, dann macht es einen Unterschied, ob das Metallblättchen den Becher außen oder innen berührt:

Bei einer Berührung außen werden nur so viele Ladungen übertragen, bis die Ladungsdichte am Metallblättchen und am Becher ausgeglichen sind.

Bei einer Berührung innen werden alle Ladungen übertragen weil die Becherinnenseite ungeladen bleibt und der Ladungsausgleich erst abgeschlossen ist, wenn auch das Metallblättchen ungeladen ist.

Bandgenerator von van de Graaf: Auf ein Transportband werden von einer Spannungsquelle Ladungen aufgesprüht oder aufgeschmiert. Das Transportband führt in das Innere einer Hohlkugel wo die Ladungen abgegriffen und auf die Kugeloberfläche übertragen werden.

Das elektrische Feld der Erde

Die Erde trägt eine negative elektrische Überschussladung wodurch nahe der Erdoberfläche nach unten gerichtete Feldstärken zwischen $100\,\mathrm{V/m}$ und $300\,\mathrm{V/m}$ auftreten. Im Mittel ist mit einem Richtwert von $130\,\mathrm{V/m}$ zu rechnen.

Die Feldstärke nimmt mit wachsendem Abstand zur Erdoberfläche schneller ab, als es bei einer geladenen Kugel im leeren Raum zu erwarten wäre. Das liegt daran, dass in der Lufthülle (auch nahe des Erdbodens aber vor allem in der Ionosphäre in 100 km bis 300 km Höhe) der Erde mehr positiv geladene als negativ geladene Ionen zu finden sind und die Lufthülle damit positive Überschussladungen beinhaltet.

Elektrische Stromdichte und elektrische Flächenstromdichte

Elektischer Strom I, der durch einen Leiter fließt, verteilt sich auf den Leiterquerschnitt. Zur Erfassung der Art dieser Verteilung definieren wir die *elektrische Stromdichte* $\vec{J}$ (mit der SI-Einheit A/m^2), die zu jedem Punkt im Leiter Richtung und lokale Intensität des Stroms angibt.

Analog dazu wird für Ströme in leitenden Oberflächen die *Flächenstromdichte* $\vec{K}$ (mit der SI-Einheit A/m) definiert.

Für Gleichströme (sowie niederfrequente Wechselströme) in geraden Leitern ohne sprunghafte Geometrieänderungen ist das $\vec{J}$-Feld bzw. $\vec{K}$-Feld im Leiter homogen.

Resistivität und Konduktivität

Die *Resistivität* (*spezifischer Widerstand*) ρ gibt für ein Material an, wie schlecht es den elektrischen Strom leitet. Für einen Leiter der Länge l mit der Querschnittsfläche A gilt:

$$R = \rho \frac{l}{A}, \qquad [\rho] = 1\,\Omega\mathrm{m}$$

Analog dazu gibt die *Konduktivität* (*spezifischer Leitwert*) γ an, wie gut ein Material den elektrsichen Strom leitet:

$$G = \gamma \frac{A}{l}, \qquad \gamma = \frac{1}{\rho}, \qquad [\gamma] = 1\,{}^{\mathrm{S}}/_{\mathrm{m}}$$

Das lokale ohmsche Gesetz

Analog zum globalen Ohm'schen Gesetz $U = RI$ bzw. $I = GU$ gilt lokal für die elektrische Feldstärke $\vec{E}$, die Resistivität ρ und die Stromdichte $\vec{J}$:

$$\vec{E} = \rho\vec{J} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{J} = \gamma\vec{E}$$

Analog zur Form $P = UI = RI^2 = GU^2$ gilt für die *Dichte der Verlustleistung* (*Dichte der Joule-Verluste*) $p = P/V$:

$$p = \rho J^2 = \gamma E^2$$

$\vec{E}$-Feld und elektrisches Potentialfeld von Punktladungen Multipolentwicklung

Für das Feld einer Punktladung Q gilt in einem Punkt $\mathcal{P}$ in der Entfernung r und Richtung $\vec{e}_r$:

$$\varphi(\mathcal{P}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}, \qquad \vec{E}(\mathcal{P}) = -\frac{\mathbf{d}\varphi}{\mathbf{d}r}\vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r$$

Im Fall mehrerer Punktladungen überlagern sich die Felder der einzelnen Punktladungen (Superposition).

Wenn eine Ansammlung von Punktladungen zu einer Punktladung zusammengefasst werden soll ist nicht nur die Gesamtladung (*Monopol, Ladungsmoment nullter Ordnung*) sondern sind auch die sog. *Ladungsmomente höherer Ordnung* (Dipol, Quadrupol, etc.) zu berücksichtigen (Multipolentwicklung).

Punktdipole
elektrisches Moment

Wird eine Anordnung von Punktladungen $Q_1, Q_2, \ldots$ an den Orten $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots$ zu einer Punktladung $Q = \sum Q_i$ am Ort $\mathcal{P}_0$ zusammengefasst, so wird das von der Ladungsanordnung ausgehende Dipolfeld durch eine einzelne vektorielle Größe, das sog. *elektrische Moment* $\vec{p}$ beschrieben:

$$\vec{p} = \sum \overrightarrow{\mathcal{P}_0\mathcal{P}_i} \cdot Q_i$$

D.h. das elektrische Moment zeigt von den negativen Ladungen zu den positiven Ladungen. Das elektrische Moment (und damit das von der Ladungsanordnung ausgehende Dipolfeld) ist besonders groß, wenn die Ladungen besonders groß sind sowie wenn der Abstand der Ladungen besonders groß ist.

$\vec{E}$-Feld und φ-Feld des Punktdipols

Wir betrachten einen Punktdipol $\vec{p} = p\vec{e}_p$ im Ursprung des Koordinatensystems und das Dipolfeld am Ort $\vec{r} = r\vec{e}_r$. Sei dazu ϑ mit $\cos\vartheta = \vec{e}_p \cdot \vec{e}_r$ der Winkel zwischen $\vec{p}$ und $\vec{r}$. Es gilt an der Stelle $\vec{r}$:

$$\varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon}\frac{\cos\vartheta}{r^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{e}_p \cdot \vec{e}_r}{r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon}\frac{3\cos(\vartheta)\vec{e}_r - \vec{e}_p}{r^3} = \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}}{4\pi\varepsilon r^3}$$

D.h. das Dipolfeld nimmt mit der Entfernung von der Ladungsanordnung um eine Potenz stärker ab als das Feld einer Punktladung. Daher ist das Dipolfeld einer Ladungsanordnung insbesondere dann von Interesse, wenn die Anordnung insgesamt keine Überschussladung beinhaltet und das Dipolfeld daher nicht mit dem Feld einer Punktladung (Monopolfeld) überlagert wird.

Linienladungen
Linienladungsdichte

Eine kontinuierliche Verteilung einer Überschussladung entlang einer Kurve $\mathcal{S}$ wird *Linienladung* genannt. Die Größe $\tau = Q/l$ (mit l für die Länge der Linie) wird *Linienladungsdichte* genannt. Es gilt für das Feld der Linienladung am Ort $\mathcal{P}$

$$\varphi(\mathcal{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\mathcal{S}} \frac{\tau}{r}\,\mathbf{d}S, \qquad \vec{E}(\mathcal{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\mathcal{S}} \frac{\vec{e}_r \cdot \tau}{r^2}\,\mathbf{d}S$$

mit $\vec{r} := \mathcal{P} - \mathcal{S}$ und $r := ||\vec{r}||_2$. Für den Sonderfall dass $\mathcal{S}$ eine Gerade und τ konstant ist gilt

$$\varphi(\mathcal{P}) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right), \qquad \vec{E}(\mathcal{P}) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\frac{\vec{e}_r}{r}$$

mit beliebigem r_0 zum Festsetzen des Bezugsortes.

Liniendipole

Das Feld einer Ansammlung von Linienladungen in Form paralleler Geraden kann durch einen Liniendipol beschrieben werden. Hierbei ist es sinnvoll sich die Linienladungen als Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots$ auf einer Ebene vorzustellen die die Linienladungen normal schneidet. So kommt man für die Anordnung auf das *längenbezogene elektrische Moment* $\vec{p}\,'$ im Punkt $\mathcal{P}_0$:

$$\vec{p}\,' = \sum \overrightarrow{\mathcal{P}_0\mathcal{P}_i} \cdot \tau_i$$

Das φ-Feld und $\vec{E}$-Feld von $\vec{p}\,'$ im Punkt $\vec{r}$ mit $\mathcal{P}_0$ im Ursprung ist dann gegeben durch:

$$\varphi = \frac{p'}{2\pi\varepsilon}\frac{\vec{e}_p \cdot \vec{e}_r}{r} \qquad \vec{E} = \frac{3(\vec{p}\,' \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}\,'}{2\pi\varepsilon r^2}$$

Flächenladungen

Das Feld einer auf einer Oberfläche $\mathcal{A}$ verteilten Ladung kann mit Hilfe der *Flächenladungsdichte* $\sigma = Q/A$ durch Integration ermittelt werden:

$$\varphi(\mathcal{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\mathcal{A}} \frac{\sigma}{r}\,\mathbf{d}A, \qquad \vec{E}(\mathcal{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\mathcal{A}} \frac{\vec{e}_r \cdot \sigma}{r^2}\,\mathbf{d}A$$

mit $\vec{r} := \mathcal{P} - \mathcal{A}$ und $r := ||\vec{r}||_2$. Für den Sonderfall dass $\mathcal{A}$ eine Ebene und σ konstant ist entsteht ein homogenes Feld mit

$$\varphi(\mathcal{P}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon} r, \qquad \vec{E}(\mathcal{P}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\vec{e}_r$$

mit $\vec{r}$ als Normalabstand von der Ebene zum Punkt $\mathcal{P}$.

Raumladungen

Das Feld einer über ein Volumen $\mathcal{V}$ verteilten Ladung kann mit Hilfe der *Raumladungsdichte* $\varrho = Q/V$ durch Integration ermittelt werden:

$$\varphi(\mathcal{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\mathcal{V}} \frac{\varrho}{r} \, \mathbf{d}V, \qquad \vec{E}(\mathcal{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{e}_r \cdot \varrho}{r^2} \, \mathbf{d}V$$

Die Formeln für Linienladungen, Flächenladungen und Raumladungen folgen alle dem gleichen Schema: Die Linie, Fläche bzw. der Raum wir als Kontinuum von Punkten betrachtet und das Integral berechnet jeweils die Superposition der Felder dieser infinitesimal kleinen Punktladungen.

Ladungserhaltung
Veknüpfung von $\vec{J}$- und ϱ-Feld

Es gilt Ladungserhaltung. Ladungen können nicht erzeugt oder vernichtet werden. Sie können sich nur in Form von Strömen bewegen. D.h. für jedes Volumen $\mathcal{V}$ und seine Hülle $\partial\mathcal{V}$ gilt global:

$$I(\partial\mathcal{V}) = -\dot{Q}(\mathcal{V})$$

Dieser Umstand kann auch lokal mit Hilfe der Stromdichte $\vec{J}$ und der Raumladungsdichte ϱ ausgedrückt werden:

$$\operatorname{div}\vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = -\dot{\varrho}$$

Der div-Operator ermittelt die Quellendichte eines Vektorfeldes. D.h. überall dort, wo ein elektrischer Strom entsteht muss die Ladungsdichte mit der Zeit abnehmen und überall dort wo ein elektrischer Strom endet nimmt die Ladungsdichte mit der Zeit zu.

Veknüpfung von $\vec{E}$- und φ-Feld

Das $\vec{E}$-Feld zeig stets in Richtung des abfallenden Potentials:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z$$

Da bei mehrfacher Differentiation (hinreichend „glatter" Funktionen) die Reihenfolge der Differentiation unerheblich ist gilt:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

Und daher:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

Der Satz von der elektrischen Umlaufspannung

Wirbelfreiheit konservativer Felder

Im elektrostatischen Fall ist die Spannung in jedem Umlauf Null. Damit ist das $\vec{E}$-Feld ein konservatives (d.h. wirbelfreies) Feld und kann mit Hilfe der Potentialtheorie untersucht werden.

Aus der Definition des elektrischen Potentialfeldes wissen wir:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

Wir definieren den rot-Operator:

$$\operatorname{rot} \vec{E} := \left(\tfrac{\partial E_z}{\partial y} - \tfrac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \tfrac{\partial E_x}{\partial z} - \tfrac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \tfrac{\partial E_y}{\partial x} - \tfrac{\partial E_x}{\partial y} \right)^T$$

Und können somit den Satz von der elektrischen Umlaufspannung mit der Wirbelfreiheit als Vorraussetzung schreiben:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \oint_{\mathcal{A}} \vec{E} \cdot \mathbf{d}\vec{s} = 0$$

Materialgleichungen im Zusammenhang mit dem $\vec{E}$-Feld

Für isotrope, lineare und zumindest in einer kleinen Umgebung zeitlich und räumlich homogene Dielektrika extistiert eine reelle Größe ε (Permittivität) sodass:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Für isotrope, lineare und zumindest in einer kleinen Umgebung zeitlich und räumlich homogene Leiter extistiert eine reelle Größe γ (Leitfähigkeit) sodass:

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

Im leeren Raum gilt $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\gamma = 0$.

Grenzflächen und Sprungbedingungen

An der Grenzfläche zwischen zwei Körpern $\mathcal{V}^+$ und $\mathcal{V}^-$ mit unterschiedlichen Materialeigenschaften tritt eine sprungartige Unstetigkeit der Feldgrößen auf. Diese wird in Form einer Sprungbedingung angeschrieben.

Sei z.B. A^+ der Grenzwert einer Größe bei Näherung an die Grenzfläche in $\mathcal{V}^+$ und A^- der Grenzwert der selben Größe bei Näherung an die Grenzfläche in $\mathcal{V}^-$. Dann ist

$$[\![A]\!] := A^+ - A^-$$

der *Sprung von* A beim Übertritt von $\mathcal{V}^-$ zu $\mathcal{V}^+$.

Ist z.B. bekannt, dass sich die Tangentialkomponente des $\vec{E}$-Feldes beim Übertritt durch die Grenzfläche nicht ändert so schreibt man

$$[\![\vec{E}_t]\!] = \vec{0}.$$

Grenzflächen und Sprünge im $\vec{J}$-Feld

Wir betrachten die zur Grenzfläche normale Komponente J_n von $\vec{J}$.

Wenn $[\![J_n]\!] \neq 0$ ist dann muss sich Überschussladung an der Grenzfläche ansammeln oder von ihr abgezogen werden:

$$[\![J_n]\!] = -\dot{\sigma}$$

Da für niederfrequente Vorgänge i.d.R. $\dot{\sigma} \approx 0$ ist kann für viele Fälle $[\![J_n]\!] = 0$ angenommen werden.

(Zum Vorzeichen von J_n: der Normalvektor der Grenzschicht ist von $\mathcal{V}^-$ nach $\mathcal{V}^+$ orientiert.)

Grenzflächen und Sprünge im $\vec{D}$-Feld

Wir betrachten die zur Grenzfläche normale Komponente D_n von $\vec{D}$.

Wenn $[\![D_n]\!] \neq 0$ ist dann muss es Anteile im $\vec{D}$-Feld geben die in der Grenzfläche beginnen oder enden. D.h. die Grenzfläche ist eine Quelle oder Senke des $\vec{D}$-Feldes. Wegen $\operatorname{div} \vec{D} = \varrho$ wissen wir also:

$$[\![D_n]\!] = \sigma$$

Ist die Grenzfläche ladungsfrei gilt daher $[\![D_n]\!] = 0$ und D_n ist beim Übertritt durch die Grenzfläche stetig.

Sprungbedingungen im $\vec{D}$- und $\vec{E}$-Feld

An der Grenzfläche zwischen zwei isotropen Dielektrika gilt für die Tangentialkomponenten $\vec{D}_t$ und $\vec{E}_t$ des $\vec{D}$- und $\vec{E}$-Feldes:

$$\vec{D}_t^+ = \vec{D}_t^- \frac{\varepsilon^+}{\varepsilon^-}, \qquad [\![E_t]\!] = \vec{0}$$

An der Grenzfläche mit der Flächenladungsdichte σ zwischen zwei isotropen Dielektrika gilt für die Normalkomponenten D_n und E_n des $\vec{D}$- und $\vec{E}$-Feldes:

$$[\![D_n]\!] = \sigma, \qquad E_n^+ = E_n^- \frac{\varepsilon^-}{\varepsilon^+} + \frac{\sigma}{\varepsilon^+}$$

Ströme durch Grenzflächen

Wir betrachten einen Sprung $[\![\gamma]\!] = \gamma^+ - \gamma^-$ zwischen zwei isotropen Leitern im quasistatischen Zustand mit $\dot{\sigma} = 0$.

D.h. $[\![J_n]\!] = 0$ und $[\![\vec{E}_t]\!] = \vec{0}$.

Wegen $\vec{J}_t^\pm = \gamma^\pm \vec{E}_t$ ist i.a. $[\![\vec{J}_t]\!] \neq \vec{0}$. D.h. die Tangentialkomponente der Stromdichte ist unstetig.

Wegen $J_n = \gamma^\pm E_n^\pm$ ist i.a. $[\![E_n]\!] \neq \vec{0}$. Und wegen $D_n^\pm = \varepsilon E_n^\pm$ folgt $[\![D_n]\!] = \sigma \neq \vec{0}$. D.h. an der Kontaktfläche stellt sich eine (i.a. sehr kleine) Flächenladung ein:

$$\sigma = [\![D_n]\!] = \varepsilon [\![E_n]\!] = \varepsilon \left(\frac{1}{\gamma^+} - \frac{1}{\gamma^-} \right) J_n$$